РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В КОЛЬЦЕВОМ ВОЛНОВОДЕ С ДИЭЛЕКТРИКОМ

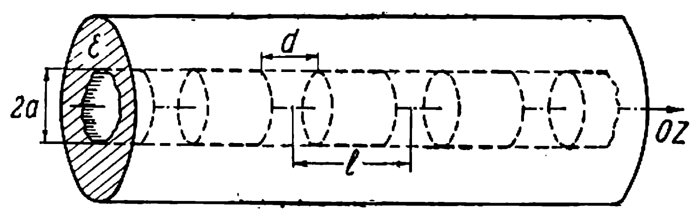
С. С. Третьякова

Вопрос о распространении электромагнитных волн в кольцевых волноводах с диэлектриком вызывает интерес, поскольку в последнее время кольцевые волноводы находят широкое применение в различных областях техники сверхвысоких частот. Примером может служить использование их в качестве волноводных фильтров в линиях передач сверхвысоких частот, ускоряющих систем в линейных ускорителях, а также периодических структур в приборах, использующих эффект Вавилова — Черенкова.

Поскольку в практических устройствах кольцевой волновод изготовляется в виде системы колец, нанесенных на диэлектрический стержень или находящихся в диэлектрическом канале, важно выяснить влияние диэлектрической среды на характеристики кольцевого волновода. Особый интерес должен представлять случай оптически активных сред.

1. Постановка задачи

Рассмотрим кольцевой волновод (рис. 1 а, б), состоящий из периодической системы металлических идеально проводящих колец, изолированных друг от друга. Внутри или вне кольцевого волновода помещен



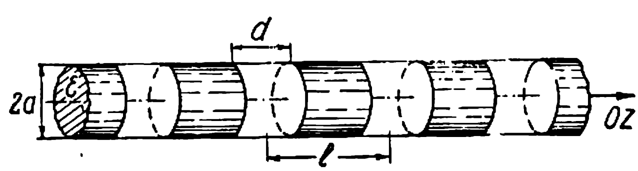


Рис. 1а,б

изотропный диэлектрик с произвольной диэлектрической проницаемостью ε. Кольца предполагаются бесконечно тонкими. Вводя цилиндрическую систему координат (r, φ, z), будем искать те волны, которые могут распространяться в данной системе в направлении оси z. Благодаря аксиальной симметрии системы рассматриваются только решения, в которых зависимость по φ определяется множителем $e^{in\varphi}$. Периодичность системы приводит к тому, что поля можно представить в виде рядов Фурье

$$\vec{E}(r, \varphi, z) = e^{in\varphi} \cdot e^{ih_0 z} \sum_m \vec{E}_m(r) e^{i\frac{2\pi m}{l}} \cdot e^{-i\omega t},$$

$$\vec{H}(r, \varphi, z) = e^{in\varphi} \cdot e^{ih_0 z} \sum_m \vec{H}_m(r) e^{i\frac{2\pi m}{l}} \cdot e^{-i\omega t},$$

где вектор-функции $\vec{E}_m(r)$, $\vec{H}_m(r)$ для $r < a$ и $r > a$ выражаются через функции Бесселя и Ханкеля. Более подробно рассмотрим случай, когда диэлектрик заполняет область $r > a$, а для расположения диэлектрика внутри кольцевого волновода приведем лишь конечные результаты.

Из решения уравнений Максвелла составляющие поля находим в следующем виде:

$r < a$

$$E_{zm}(r) = \alpha_m p_m^2 J_n(p_m r),$$
$$E_{rm}(r) = \alpha_m i h_m p_m J'_n(p_m r) - \beta_m \frac{kn}{r} J_n(p_m r),$$
$$E_{\varphi m}(r) = -\alpha_m \frac{h_m n}{r} J_n(p_m r) - \beta_m i k p_m J'_n(p_m r),$$
$$H_{zm}(r) = \beta_m p_m^2 J_n(p_m r),$$
$$H_{rm}(r) = \alpha_m \frac{kn}{r} J_n(p_m r) + \beta_m i h_m p_m J'_n(p_m r),$$
$$H_{\varphi m}(r) = \alpha_m i k p_m J'_n(p_m r) - \beta_m \frac{h_m n}{r} J_n(p_m r);$$

$r > a$

$$E_{zm}(r) = \tilde{\alpha}_m p_m'^2 H_n^{(1)}(p'_m r),$$
$$E_{rm}(r) = \tilde{\alpha}_m i h_m p'_m H_n^{(1)\prime}(p'_m r) - \tilde{\beta}_m \frac{kn}{r} H_n^{(1)}(p'_m r),$$
$$E_{\varphi m}(r) = -\tilde{\alpha}_m \frac{h_m n}{r} H_n^{(1)}(p'_m r) - \tilde{\beta}_m i k p'_m H_n^{(1)\prime}(p'_m r),$$
$$H_{zm}(r) = \tilde{\beta}_m p_m'^2 H_n^{(1)}(p'_m r),$$
$$H_{rm}(r) = \tilde{\alpha}_m \frac{kn\varepsilon}{r} H_n^{(1)}(p'_m r) + \tilde{\beta}_m i h_m p'_m H_n^{(1)\prime}(p'_m r),$$
$$H_{\varphi m}(r) = \tilde{\alpha}_m i k p'_m \varepsilon H_n^{(1)\prime}(\varphi'_m r) - \tilde{\beta}_m \frac{h_m n}{r} H_n^{(1)}(p'_m r),$$

где $k = \frac{\omega}{c}$; $p_m = \sqrt{k^2 - h_m^2}$; $h_m = h_0 + \frac{2\pi m}{l}$; $p'_m = \sqrt{k^2\varepsilon - h_m^2}$.

Подчиняя компоненты поля точным граничным условиям на периоде структуры, получим соотношения между коэффициентами α_m, β_m, $\tilde{\alpha}_m$, $\tilde{\beta}_m$:

$$\tilde{\alpha}_m = \alpha_m \frac{p_m^2}{p_m'^2} \frac{J_n(p_m a)}{H_n^{(1)\prime}(p'_m a)}$$

$$\tilde{\beta}_m = \alpha_m \frac{i h_m n}{k p'_m a} \left(1 - \frac{p_m^2}{p_m'^2}\right) \frac{J_n(p_m a)}{H_n^{(1)\prime}(p'_m a)} + \beta_m \frac{p_m}{p'_m} \frac{J'_n(p_m a)}{H_n^{(1)\prime}(p'_m a)}$$

и систему уравнений для определения коэффициентов α_m и β_m:

$$\sum_m \alpha_m p_m^2 J_n(p_m a) e^{ih_m z} = 0 \quad \text{(металл)};$$

$$-n \sum_m \alpha_m h_m J_n(p_m a) e^{ih_m z} + ika \sum_m \beta_m p_m J_n'(p_m a) = 0 \quad \text{(металл)};$$

$$n \sum_m \alpha_m \frac{h_m}{p_m'} \frac{(p_m'^2 - p_m^2)}{H_n^{(1)\prime}(p_m' a)} J_n(p_m a) H_n^{(1)}(p_m' a) e^{ih_m z} +$$

$$+ ika \sum_m \beta_m \frac{p_m^2}{H_n^{(1)\prime}(p_m' a)} \left[J_n(p_m a) H_n^{(1)\prime}(p_m' a) - \frac{p_m'}{p_m} J_n'(p_m a) H_n^{(1)}(p_m' a) \right] \times$$

$$\times e^{ih_m z} = 0 \quad \text{(щель)};$$

$$ika \sum_m \alpha_m \frac{p_m}{H_n^{(1)}(p_m' a)} \left[J_n'(p_m a) H_n^{(1)}(p_m' a) - \frac{p_m \varepsilon}{p_m'} J_n(p_m a) H_n^{(1)\prime}(p_m' a) - \right.$$

$$\left. - \frac{n^2 h_m^2}{k^2 a^2 p_m p_m'} \left(1 - \frac{p_m^2}{p_m'^2}\right) \frac{H_n^{(1)}(p_m' a)}{H_n^{(1)\prime}(p_m' a)} J_n(p_m a) H_n^{(1)}(p_m' a) \right] e^{ih_m z} +$$

$$+ n \sum_m \beta_m \frac{h_m}{H_n^{(1)\prime}(p_m' a)} \left[J_n(p_m a) H_n^{(1)\prime}(p_m' a) - \frac{p_m}{p_m'} J_n'(p_m a) H_n^{(1)}(p_m' a) \right] \times$$

$$\times e^{ih_m z} = 0 \quad \text{(щель)}.$$

Займемся теперь решением полученной системы четырех уравнений, выполняющихся на разных частях периода.

Введем безразмерные параметры $\xi = \frac{2\pi}{l} z$; $\nu = \frac{h_0 l}{2\pi}$; $\Delta = \frac{l}{2\pi a}$; $\varkappa = \frac{kl}{2\pi}$. Тогда

$$h_m = \frac{2\pi}{l}(\nu + m); \quad p_m a = \frac{1}{\Delta} \sqrt{\varkappa^2 - (\nu + m)^2}; \; p_m' a = \frac{1}{\Delta} \sqrt{\varkappa^2 \varepsilon - (\nu + m)^2}.$$

При $|m| \to \infty$ $p_m a = \frac{i}{\Delta}(\nu + m) \frac{|m|}{m} \left\{1 + 0\left(\frac{1}{m^2}\right)\right\} = p_m' a$.

Используя асимптотические приближения функций Бесселя при $|m| \to \infty$, найдем, что

$$J_n(p_m a) H_n^{(1)}(p_m' a) = \frac{2}{\pi} \frac{\Delta}{i(\nu + m)} \frac{|m|}{m} \left\{1 + 0\left(\frac{1}{m^2}\right)\right\},$$

$$J_n'(p_m a) H_n^{(1)\prime}(p_m' a) = \frac{2}{\pi} \frac{\Delta}{i(\nu + m)} \frac{|m|}{m} \left\{1 + 0\left(\frac{1}{m^2}\right)\right\}$$

и величины

$$\delta_m = 1 - \frac{J_n'(p_m a) H_n^{(1)\prime}(p_m' a) \cdot \Delta p_m a}{J_n(p_m a) H_n^{(1)\prime}(p_m' a) - \frac{p_m'}{p_m} J_n'(p_m a) H_n^{(1)}(p_m' a)} \cdot \frac{1}{\nu + m} \cdot \frac{|m|}{m}$$

$$\gamma_m = 1 - \frac{J_n(p_m a) H_n^{(1)\prime}(p_m' a) \frac{p_m \varepsilon}{p_m'} - J_n'(p_m a) H_n^{(1)}(p_m' a)}{J_n(p_m' a) H_n^{(1)}(p_m' a)} \frac{\nu + m}{(1+\varepsilon)\Delta p_m' a} \frac{|m|}{m}$$

при $|m| \to \infty$ стремятся к нулю, как $1/m^2$. Обозначая

$$a_m = \alpha_m p_m^2 J_n(p_m a),$$

$$b_m = \alpha_m \frac{n h_m}{ika H_n^{(1)}(p_m' a)} \cdot \frac{p_m'^2 - p_m^2}{2ip_m'} \cdot J_n(p_m a) H_n^{(1)}(p_m' a) + \beta_m \frac{p_m^2}{2iH_n^{(1)}(p_m' a)} \times$$

$$\times \left[J_n(p_m a) H_n^{(1)}(p_m' a) - \frac{p_m'}{p_m} J_n'(p_m a) H_n^{(1)}(p_m' a) \right],$$

получим

$$\sum_m a_m e^{i(\nu+m)\xi} = 0 \text{ (металл)};$$

$$\sum_m \left(-\frac{n\Delta}{\varkappa}\frac{\nu+m}{\varkappa^2-(\nu+m)^2}a_m + \frac{1-\delta_m}{\nu+m}\frac{|m|}{m}b_m\right)e^{i(\nu+m)\xi} = \sum_m a_m \Phi_{mn} e^{i(\nu+m)\xi} \text{ (металл)};$$

$$\sum_m b_m e^{i(\nu+m)\xi} = 0 \text{ (щель)};$$

$$\sum_m \left(-\frac{n\Delta}{\varkappa}\frac{\nu+m}{\varkappa^2-(\nu+m)^2}b_m + \frac{1-\chi_m}{\nu+m}\frac{|m|}{m}a_m\right)e^{i(\nu+m)\xi} =$$

$$= \sum_m a_m K_{mn} e^{i(\nu+m)\xi} + \sum_m b_m L_{mn} e^{i(\nu+m)\xi} \text{ (щель)},$$

где $\Phi_{mn} = \frac{n\Delta\varkappa}{\nu+m}\frac{(\xi-1)(1-\delta_m)}{\varkappa^2-(\nu+m)^2}\frac{H_n^{(1)}(p'_m a)}{H_n^{(1)}(p'_m a)}$;

$$K_{mn} = \frac{n^2\Delta^2(\xi-1)}{\varkappa^2\xi-(\nu+m)^2}\frac{1}{\nu+m}\frac{|m|}{m}\frac{H_n^{(1)}(p'_m a)}{H_n^{(1)\prime}(p'_m a)} \times$$

$$\times \left\{1 - \frac{\varkappa^2\xi-(\nu+m)^2}{\varkappa^2-(\nu+m)^2}(1-\delta_m)\frac{J_n(p_m a)H_n^{(1)\prime}(p'_m a)}{2iJ'_n(p_m a)} - \frac{p_m}{p'_m}\frac{J'_n(p_m a)H_n^{(1)}(p'_m a)}{H_n^{(1)\prime}(p'_m a)}\right\};$$

$$L_{mn} = -\frac{n\Delta}{\varkappa}\frac{\nu+m}{\varkappa^2-(\nu+m)^2}\left\{1-(1-\delta_m)\frac{J_n(p_m a)H_n^{(1)\prime}(p'_m a) - \frac{p_m}{p'_m}J'_n(p_m a)H_n^{(1)}(p'_m a)}{2iJ'_n(p_m a)H_n^{(1)\prime}(p'_m a)}\right\}.$$

Системы уравнений, подобные этой, хорошо изучены и могут быть решены путем сведения их к задаче Римана — Гильберта с помощью метода, детально изложенного в работах [1]; [3]. Опуская рассмотрение задачи Римана — Гильберта, приведем окончательное решение ее в виде однородной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно a_m, b_m, c_1, c_2:

$$\sum_k \left\{a_k\left[\left(\chi_k\frac{|k|}{k} + (\nu+k)K_{kn}\right)V_m^k - \delta_{mk}\right] + b_k(\eta_k + (\nu+k)L_{kn})V_m^k\right\} +$$

$$+ 2c_1 R_m = 0;$$

$$\sum_k a_k\frac{|k|}{k}\left(\tilde{V}_{[\sigma]}^k - \frac{1}{\nu+k}\right)\left[\chi_k - \frac{n\Delta}{\varkappa}\eta_k + (\nu+k)\left(\frac{|k|}{k}K_{kn} - \frac{n\Delta}{\varkappa}\Phi_{kn}\right)\right] +$$

$$+ \sum_k b_k\left(\tilde{V}_{[\sigma]}^k - \frac{1}{\nu+k}\right)\left(\eta_k - \frac{n\Delta}{\varkappa}\delta_k + (\nu+k)L_{kn}\right) + 2C_1\tilde{R}_{[\sigma]} + \frac{n\Delta}{\varkappa}2C_2\tilde{R}_{[\delta]} = 0;$$

$$\sum_k \left\{a_k\left[-(\eta_k + (\nu+k)\Phi_{kn})\left(\frac{|k|}{k}V_m^k - \delta_{mk}\right)\right] +\right.$$

$$\left. + b_k\left[-\delta_k V_m^k - (1-\delta_k)\frac{|k|}{k}\delta_{mk}\right]\right\} + 2C_2 R_m = 0 \qquad (1)$$

$$\sum_k a_k V_{[\sigma]}^k\left[\frac{n\Delta}{\varkappa}\chi_k\frac{|k|}{k} - \eta_k\frac{|k|}{k} + (\nu+k)\left(\frac{n\Delta}{\varkappa}K_{kn} - \frac{|k|}{k}\Phi_{kn}\right)\right] +$$

$$+ \sum_k b_k V_{[\sigma]}^k\left[\frac{n\Delta}{\varkappa}\eta_k - \delta_k + (\nu+k)L_{kn}\right] + 2C_2 R_{[\sigma]} + \frac{n\Delta}{\varkappa}2C_1 R_{[\sigma]} = 0,$$

$$m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

где величины V_m^k, R_m определяются через функции Лежандра от аргумента $u=\cos\frac{\pi d}{l}$ (см. [1], $\delta_{mk}=\begin{cases}1 & m=k\\ 0 & m\neq k,\end{cases}$ $\eta_k=\frac{n\Delta\varkappa}{\varkappa^2-(\nu+k)^2}$,

$$R_{[\sigma]}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\frac{R_m}{\nu+m}=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}P_{\nu-1}(u);$$

$$\tilde{R}_{[\sigma]}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{|m|}{m}\frac{R_m}{\nu+m}=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}P_{\nu-1}(-u);$$

$$V_{[\sigma]}^k=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\frac{V_m^k}{\nu+m}=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\cdot\frac{\nu-1}{\nu+k}[P_{\nu-1}(u)P_{k+1}(u)-P_{\nu-2}(u)P_k(u)];$$

$$V_{[\sigma]}^k-\frac{1}{\nu+k}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{|m|}{m}\frac{V_m^k}{\nu+m}=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\frac{\nu-1}{\nu+k}[P_{\nu-1}(-u)P_{k+1}(-u)+$$
$$+P_{\nu-2}(-u)P_k(-u)].$$

Равенство нулю определителя этой системы и является точным дисперсионным уравнением для несимметричных волн, распространяющихся в кольцевом волноводе, помещенном в диэлектрическую среду.

Поскольку система уравнений бесконечная, то дисперсионное уравнение представляется бесконечным определителем. Однако элементы определителя в качестве множителя содержат δ_m и χ_m, которые при $|m|\to\infty$ стремятся к нулю как $1/m^2$. Это дает возможность ограничить определитель и пользоваться в расчетах конечным числом членов, которое зависит от требуемой точности.

2. Случай симметричных волн

Для случая симметричных волн ($n=0$) в кольцевом волноводе можно выделить два типа волн, аналогичных E- и H- волнам в сплошном волноводе. Математически это приводит к разделению системы уравнений (1), после подстановки $n=0$, на две независимых системы, одна из которых описывает распространение E-волн в кольцевом волноводе, а другая — H-волн. Условие существования нетривиального решения каждой из них дает дисперсионные уравнения для E- и H-волн соответственно. В простейшем случае нулевого приближения δ_m, $\chi_m=0$ при $m\neq 0$ (что справедливо для $\varkappa<1$), и дисперсионные уравнения имеют следующий вид.

E-волны:

$$J_0(p_0a)=\frac{\frac{p_0a\cdot\varepsilon}{p_0'a}J_0(p_0a)H_0^{(1)\prime}(p_0a)-J_0'(p_0a)H_0^{(1)}(p_0'a)}{H_0^{(1)}(p_0'a)\,p_0a(1+\varepsilon)\Delta}\cdot\nu\frac{P_\nu(-u)+P_{\nu-1}(-u)}{P_\nu(-u)-P_{\nu-1}(-u)};\quad(2)$$

H-волны:

$$J_1(p_0a)=\frac{J_0(p_0a)H_0^{(1)\prime}(p_0'a)-\frac{p_0'a}{p_0a}J_0'(p_0a)H_0^{(1)}(p_0'a)}{2\nu H_1^{(1)}(p_0a)}\Delta\,p_0a\cdot\frac{P_\nu(u)-P_{\nu-1}(u)}{P_\nu(u)+P_{\nu-1}(u)},\quad(3)$$

где $P_\nu(u)$ — функции Лежандра от $u=\cos\pi d/l$.

Неизвестная постоянная распространения $\nu=\nu'+i\nu''$ входит в аргумент функций Бесселя и Ханкеля и в индекс функций Лежандра. Трансцендентные уравнения подобного рода легко решаются с помощью электронно-вычислительных машин.

В случае длинноволнового приближения уравнения (2) и (3) несколько упрощаются ($\nu \ll 1$).

E-волны:

$$J_0(p_0a) = \frac{\frac{p_0a\cdot\varepsilon}{p_0'a} J_0(p_0a) H_0^{(1)\prime}(p_0'a) - J_0'(p_0a) H_0^{(1)}(p_0'a)}{\Delta(1+\varepsilon) p_0a H_0^{(1)}(p_0'a)} \frac{1}{2\ln\sin\frac{\pi d}{2l}}; \tag{4}$$

H-волны:

$$J_1(p_0a) = \frac{J_0(p_0a) H_0^{(1)}(p_0'a) - \frac{p_0'a}{p_0a} J_0'(p_0a) H_0^{(1)}(p_0'a)}{2H_1^{(1)}(p_0'a)} p_0a\cdot\Delta\ln\cos\frac{\pi d}{2l}. \tag{5}$$

Если в этих уравнениях положить $\varepsilon = 1$ и $d = l - 2b$ ($2b$ — ширина кольца), то (4) и (5) можно записать в таком виде.

E-волны:

$$J_0(p_0a) = \frac{ia}{l(p_0a)^2}\cdot\frac{1}{H_0^{(1)}(p_0a)\ln\cos\frac{\pi b}{l}}; \tag{6}$$

H-волны:

$$J_1(p_0a) = \frac{-il}{\pi^2 a}\frac{\ln\sin\frac{\pi b}{l}}{H_1^{(1)}(p_0a)}, \tag{7}$$

что в точности совпадает с дисперсионными уравнениями для кольцевого волновода, полученными в работе [2].

Если диэлектрик находится внутри кольцевого волновода, то дисперсионные уравнения для симметричных E- и H-волн в нулевом приближении имеют вид, аналогичный (2) и (3).

E-волны:

$$J_0(p_0'a) = \frac{J_0'(p_0'a) H_0^{(1)}(p_0a) - \frac{p_0'a}{p_0a\varepsilon} J_0(p_0'a) H_0^{(1)\prime}(p_0a)}{p_0'a H_0^{(1)}(p_0a)(1+\varepsilon)} \frac{\nu}{2\Delta}\frac{\varepsilon P_\nu(-u) + P_\nu(-u)}{P_{\nu-1}(-u) - P_\nu(-u)}.$$

H-волны:

$$J_1(p_0'a) = \frac{J_0(p_0'a) H_0^{(1)\prime}(p_0a) - \frac{p_0a}{p_0'a} J_0'(p_0'a) H_0^{(1)}(p_0a)}{H_1^{(1)}(p_0a)} \frac{\Delta\cdot p_0'a}{2\nu}\frac{P_\nu(u) - P_{\nu-1}(u)}{P_\nu(u) + P_{\nu-1}(u)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов. ЖТФ, XXXII, вып. 4, 1962.
2. Н. Н. Смирнов, ЖТФ, XXVIII, вып. 7, 1958.
3. З. С. Агранович, В. П. Шестопалов. ЖТФ, XXXIV, вып. 11, 1964.