ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ СПИРАЛЬНОГО ВОЛНОВОДА

З. С. Агранович, В. П. Шестопалов

1. Рассмотрим спиральный волновод, образованный металлической спиральной лентой с шириной зазора, равной d, периодом (шагом) l. Радиус волновода $r = a$; θ — угол намотки (рис. 1). Лента металла спирали предполагается бесконечно тонкой и идеально проводящей.

Введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z), приняв ось волновода за ось Oz, и будем искать электромагнитные волны, которые могут распространяться в такой системе в направлении оси z без затухания и с затуханием.

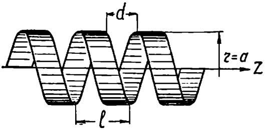

Рис. 1.

В обоих случаях задача сводится к отысканию решений однородных уравнений Максвелла, которые внутри спирального волновода описывают бегущие волны (возможно, затухающие), а вне волновода — либо затухающие, либо расходящиеся волны.

Пусть $\vec{E}(r, \varphi, z)$, $\vec{H}(r, \varphi, z)$ — такое решение (временной множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и далее опущен). При замене в этом решении z на $z + l$ мы, очевидно, снова получим решение, удовлетворяющее тем же граничным условиям, так как при смещении на период l вдоль оси волновода система переходит сама в себя. Естественно поэтому считать, что при такой замене искомое решение приобретает только числовой множитель, который мы запишем в виде $e^{ih_0 l}$, и что

$$\vec{E}(r, \varphi, z) = e^{ih_0 z}\vec{\tilde{E}}(r, \varphi, z); \quad \vec{H}(r, \varphi, z) = e^{ih_0 z}\vec{\tilde{H}}(r, \varphi, z),$$

где $\vec{\tilde{E}}(r, \varphi, z)$, $\vec{\tilde{H}}(r, \varphi, z)$ периодичны относительно z с периодом l. Очевидно также, что эти вектор-функции периодичны относительно φ с периодом 2π, так как они однозначны, а координаты (r, φ, z) и (r, $\varphi + 2\pi$, z) определяют одну и ту же точку в пространстве. Заметим, наконец, что спираль переходит сама в себя, если ее одновременно сместить по оси z на величину Δz и повернуть вокруг оси z на угол $\Delta\varphi$ так, чтобы $\Delta\varphi + \frac{2\pi\Delta z}{l} = 0$. Отсюда вытекает, что $\vec{\tilde{E}}(r, \varphi, z)$, $\vec{\tilde{H}}(r, \varphi, z)$ зависят не отдельно от φ и z, а от их комбинации

$$\zeta = \varphi + \frac{2\pi z}{l}, \tag{1}$$

причем из указанной выше периодичности этих вектор-функций относительно φ и z следует, очевидно, их периодичность относительно ζ с пе-

периодом 2π. Поэтому их можно разложить в ряд Фурье, в результате чего получим

$$\vec{E}(r, \varphi, z) = e^{ih_0 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{E}_n(r) e^{in\left(\varphi + \frac{2\pi z}{l}\right)};$$
$$\vec{H}(r, \varphi, z) = e^{ih_0 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{H}_n(r) e^{in\left(\varphi + \frac{2\pi z}{l}\right)}. \tag{2}$$

Составляющие $\vec{E}_n(r)$ и $\vec{H}_n(r)$ внутри волновода $(r < a)$ запишутся в виде

$$\begin{aligned} E_{nz} &= \alpha_n p_n^2 J_n(p_n r), \\ E_{nr} &= \alpha_n i h_n p_n J'_n(p_n r) + \beta_n \frac{kn}{r} J_n(p_n r), \\ E_{n\varphi} &= -\alpha_n \frac{n}{r} h_n J_n(p_n r) + \beta_n i k p_n J'_n(p_n r), \\ H_{nz} &= \beta_n p_n^2 J_n(p_n r), \\ H_{nr} &= -\alpha_n \frac{kn}{r} J_n(p_n r) + \beta_n i h_n p_n J'_n(p_n r), \\ H_{n\varphi} &= -\alpha_n i k p_n J'_n(p_n r) - \beta_n \frac{n}{r} h_n J_n(p_n r), \end{aligned} \tag{3}$$

где α_n, β_n — числовые коэффициенты,

$$h_n = h_0 + \frac{2\pi n}{l}; \quad p_n = i\sqrt{h_n^2 - k^2}, \quad k = \frac{\omega}{c}. \tag{4}$$

Здесь и дальше под $\sqrt{A}$ понимаем то значение квадратного корня, которое имеет положительную вещественную часть ($\mathrm{Re}\sqrt{A} > 0$), а если $\mathrm{Re}\sqrt{A} = 0$, — то отрицательную мнимую часть ($\mathrm{Im}\sqrt{A} < 0$).

Чтобы удовлетворить уравнениям Максвелла вне волновода $(r > a)$ и получить при этом только расходящиеся или затухающие волны, нужно взять составляющие вектор-функций $\vec{E}_n(r)$, $\vec{H}_n(r)$ равными выражениям, которые получаются из правых частей формул (3) при замене коэффициентов α_n, β_n на $\tilde{\alpha}_n$, $\tilde{\beta}_n$ и функций $J_n(p_n r)$, $J'_n(p_n r)$ — соответственно на $H_n^{(1)}(p_n r)$, $H_n^{(1)'}(p_n r)$.

Распорядившись неопределенными коэффициентами α_n, β_n, $\tilde{\alpha}_n$, $\tilde{\beta}_n$, мы должны удовлетворить граничным условиям при $r = a$, т. е. обеспечить равенство нулю тангенциальных составляющих вектора $\vec{E}(r, \varphi, z)$ и непрерывность r-составляющей вектора $\vec{H}(r, \varphi, z)$ на металлической ленте, а также непрерывность всего поля на щели между витками ленты.

Из условий для E_z и E_φ следует, что

$$\tilde{\alpha}_n = \frac{J_n(p_n a)}{H_n^{(1)}(p_n a)} \alpha_n, \quad \tilde{\beta}_n = \frac{J'_n(p_n a)}{H_n^{(1)'}(p_n a)} \beta_n \tag{5}$$

и

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n p_n^2 J_n(p_n a) e^{in\varphi} e^{ih_n z} = 0 \quad \text{(на металле)}, \tag{6}$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n n h_n J_n(p_n a) e^{in\varphi} e^{ih_n z} + ika \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n p_n J'_n(p_n a) e^{in\varphi} e^{ih_n z} = 0$$
$$\text{(на металле)}. \tag{7}$$

Граничное условие для H_r выполняется автоматически в силу (5). Используя (5), а также известное равенство

$$J'_n(x)\,H_n^{(1)}(x) - J_n(x)\,H_n^{(1)\prime}(x) = \frac{\text{const}}{x},$$

из условий для H_z, H_φ и E_r находим, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \frac{p_n}{H_n^{(1)\prime}(p_n a)} e^{in\varphi} e^{ih_n z} = 0 \quad \text{(на щели)}, \tag{8}$$

$$ika \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_n}{H_n^{(1)}(p_n a)} e^{in\varphi} e^{ih_n z} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \frac{nh_n}{p_n H_n^{(1)\prime}(p_n a)} e^{in\varphi} e^{ih_n z} = 0$$
$$\text{(на щели)}, \tag{9}$$

$$ia \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \frac{h_n}{H_n^{(1)}(p_n a)} e^{in\varphi} e^{ih_n z} - k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \frac{n}{p_n H_n^{(1)\prime}(p_n a)} e^{in\varphi} e^{ih_n z} = 0$$
$$\text{(на щели)}. \tag{10}$$

Покажем, что уравнение (10) является следствием уравнений (8) и (9). В силу (4)

$$nh_n = \frac{l}{2\pi}(h_n - h_0)\,h_n = \frac{l}{2\pi}(k^2 - p_n^2) - \frac{l}{2\pi} h_0 h_n, \tag{11}$$

и потому, используя (8), имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \frac{nh_n}{p_n H_n^{(1)\prime}(p_n a)} e^{in\varphi} e^{ih_n z} = \frac{l}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \frac{k^2 - h_0 h_n}{p_n H_n^{(1)\prime}(p_n a)} e^{in\varphi} e^{ih_n z}.$$

Следовательно, уравнение (9) можно записать в виде

$$ika \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_n}{H_n^{(1)}(p_n a)} e^{in\varphi} e^{ih_n z} - \frac{l}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \frac{k^2 - h_0 h_n}{p_n H_n^{(1)\prime}(p_n a)} e^{in\varphi} e^{ih_n z} = 0 \quad \text{(на щели)}. \tag{9'}$$

Дифференцируя это равенство по z (что, как легко видеть, законно) и учитывая, что согласно (4)

$$\frac{l}{2\pi}(k^2 - h_0 h_n)\,h_n = \frac{l}{2\pi}(k^2 h_n - h_0 k^2 + h_0 p_n^2) = k^2 n + \frac{lh_0}{2\pi} p_n^2,$$

получим

$$-ka \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \frac{h_n}{H_n^{(1)}(p_n a)} e^{in\varphi} e^{ih_n z} - ik^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \frac{n}{p_n H_n^{(1)\prime}(p_n a)} e^{in\varphi} e^{ih_n z} -$$
$$- \frac{ilh_0}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \frac{p_n}{H_n^{(1)\prime}(p_n a)} e^{in\varphi} e^{ih_n z} = 0 \quad \text{(на щели)},$$

а это уравнение в силу (8) отличается от уравнения (10) лишь множителем ik.

Заметим еще, что в силу (11) и (6) уравнение (7) можно записать в виде

$$-\frac{i}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n\left(k^2-h_0h_n\right)J_n(p_na)\,e^{in\varphi}e^{ih_nz}+$$

$$+\,ika\sum_{n=-\infty}^{\infty}\beta_np_nJ_n'(p_na)\,e^{in\varphi}e^{ih_nz}=0\quad\text{(на металле).}\qquad(7')$$

Таким образом, для определения коэффициентов α_n и β_n имеем систему четырех однородных уравнений (6), (7'), (8) и (9'). Параметр h_0 (волновое число) находится из условия существования у этой системы ненулевого решения.

2. Для дальнейшего исследования этой системы целесообразно ввести безразмерные параметры

$$\nu=\frac{h_0l}{2\pi},\quad \varkappa=\frac{kl}{2\pi},\quad \operatorname{tg}\theta=\frac{l}{2\pi a}\qquad(12)$$

(здесь θ — угол намотки), так что

$$h_n=\frac{2\pi}{l}(n+\nu),\quad p_na=i\operatorname{ctg}\theta\sqrt{(n+\nu)^2-\varkappa^2}.\qquad(13)$$

Положим еще

$$a_n=a\alpha_np_n^2J_n(p_na),\quad b_n=\frac{\beta_np_n}{\pi H_n^{(1)\prime}(p_na)}$$

и введем «спиральную координату» по формуле (1).

Тогда уравнения (6), (7'), (8) и (9') после умножения каждого из них на $e^{i\nu\varphi}$ запишутся в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{i(n+\nu)\zeta}=0\quad\text{(на металле),}\qquad(14)$$

$$-\operatorname{tg}\theta\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\frac{\varkappa^2-\nu(n+\nu)}{\varkappa^2-(n+\nu)^2}e^{i(n+\nu)\zeta}+ika\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_nJ_n'(p_na)\,H_n^{(1)\prime}(p_na)\,e^{i(n+\nu)\zeta}=0$$

(на металле), (14а)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_ne^{i(n+\nu)\zeta}=0\quad\text{(на щели),}\qquad(14б)$$

$$\frac{ika}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a_n}{p_n^2a^2J_n(p_na)\,H_n^{(1)}(p_na)}e^{i(n+\nu)\zeta}-\operatorname{tg}\theta\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n\frac{\varkappa^2-\nu(n+\nu)}{\varkappa^2-(n+\nu)^2}e^{i(n+\nu)\zeta}=0.$$

(на щели). (14в)

Обозначим

$$x(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a_n}{\varkappa^2-(n+\nu)^2}e^{i(n+\nu)\zeta};\quad y(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{b_n}{\varkappa^2-(n+\nu)^2}e^{i(n+\nu)\zeta}.$$

Согласно уравнениям (14) и (14б) имеем

$$\varkappa^2 x(\zeta) + x''(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i(n+\nu)\zeta} = 0 \quad \text{(на металле)},$$

$$\varkappa^2 y(\zeta) + y''(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{i(n+\nu)\zeta} = 0 \quad \text{(на щели)},$$

и поэтому

$$x(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{\varkappa^2-(n+\nu)^2} e^{i(n+\nu)\zeta} = M_1 e^{i\varkappa\zeta} + M_2 e^{-i\varkappa\zeta} \quad \text{(на металле)}, \tag{15}$$

$$y(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{\varkappa^2-(n+\nu)^2} e^{i(n+\nu)\zeta} = N_1 e^{i\varkappa\zeta} + N_2 e^{-i\varkappa\zeta} \quad \text{(на щели)}, \tag{15a}$$

где M_1, M_2, N_1, N_2 — некоторые константы.

Используя равенства (15, 15а), находим, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{\varkappa^2-\nu(n+\nu)}{\varkappa^2-(n+\nu)^2} e^{i(n+\nu)\zeta} = \varkappa^2 x(\zeta) + i\nu x'(\zeta) = (\varkappa^2-\nu\varkappa) M_1 e^{i\varkappa\zeta} + (\varkappa^2+\nu\varkappa) M_2 e^{-i\varkappa\zeta} \quad \text{(на металле)},$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \frac{\varkappa^2-\nu(n+\nu)}{\varkappa^2-(n+\nu)^2} e^{i(n+\nu)\zeta} = \varkappa^2 y(\zeta) + i\nu y'(\zeta) = (\varkappa^2-\nu\varkappa) N_1 e^{i\varkappa\zeta} + (\varkappa^2+\nu\varkappa) N_2 e^{-i\varkappa\zeta} \quad \text{(на щели)}$$

и, следовательно, интересующая нас система уравнений (14—14в) распадается на следующие две системы (делим все уравнения на $e^{i\nu\zeta}$):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\zeta} = 0 \quad \text{(на металле)}, \tag{16}$$

$$\frac{ika}{\varkappa} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{p_n a^2 J_n(p_n a) H_n^{(1)}(p_n a)} e^{in\zeta} - \varkappa \operatorname{tg}\theta \left[(\varkappa-\nu) N_1 e^{i(\varkappa-\nu)\zeta} + (\varkappa+\nu) N_2 e^{-i(\varkappa+\nu)\zeta}\right] = 0 \quad \text{(на щели)}, \tag{16'a}$$

и

$$ika\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n J_n'(p_n a) H_n^{(1)\prime}(p_n a) e^{in\zeta} - \varkappa \operatorname{tg}\theta \left[(\varkappa-\nu) M_1 e^{i(\varkappa-\nu)\zeta} + (\varkappa+\nu) M_2 e^{-i(\varkappa+\nu)\zeta}\right] = 0 \quad \text{(на металле)}, \tag{17}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\zeta} = 0 \quad \text{(на щели)}. \tag{17a}$$

Эти системы мы преобразуем далее, используя асимптотику функций Бесселя и известные связи между ними [1].

Согласно (13), $\lim\limits_{|n|\to\infty} p_n a = \infty$, причем $\lim\limits_{|n|\to\infty} \arg p_n a = \frac{\pi}{2}$ (то есть при больших $|n|$ число $p_n a$ является «почти» чисто мнимым). Обозначая $p_n = iq_n$, будем иметь

$$J_n(p_n a) = e^{\frac{i n\pi}{2}} I_n(q_n a), \quad H_n^{(1)}(p_n a) = -\frac{2i}{\pi} e^{-\frac{i n\pi}{2}} K_n(q_n a),$$

где $q_n a$ «почти» положительно при больших $|n|$, т. е. $\lim\limits_{|n|\to\infty} \arg q_n a = 0$.

Воспользовавшись асимптотическими формулами для I_n и K_n при больших n, $x > 0$, получаем при $|n| \to \infty$

$$J_n(p_n a) H_n^{(1)}(p_n a) = \frac{-i}{\pi\sqrt{n^2 - p_n^2 a^2}} [1 + O(|n|^{-2})].$$

Но

$$n^2 - p_n^2 a^2 = n^2 + \operatorname{ctg}^2\theta\,[(n+\nu)^2 - \varkappa^2] = n^2(1 + \operatorname{ctg}^2\theta) + 2\nu n \operatorname{ctg}^2\theta +$$
$$+ (\nu^2 - \varkappa^2)\operatorname{ctg}^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}[(n + \nu\cos^2\theta)^2 + (\nu^2 - \varkappa^2)\cos^2\theta - \nu^2\cos^4\theta],$$

так что при больших $|n|$

$$\sqrt{n^2 - p_n^2 a^2} = \frac{n + \nu\cos^2\theta}{\sin\theta}\frac{|n|}{n}[1 + O(|n|^{-2})]$$

и, значит, при $|n| \to \infty$

$$J_n(p_n a) H_n^{(1)}(p_n a) = -\frac{i\sin\theta}{\pi(n + \nu\cos^2\theta)}\frac{|n|}{n}[1 + O(|n|^{-2})], \tag{18}$$

$$\frac{1}{p_n^2 a^2 J_n(p_n a) H_n^{(1)}(p_n a)} = \frac{i\pi(n + \nu\cos^2\theta)\sin\theta}{\cos^2\theta\,[\varkappa^2 - (n+\nu)^2]}\frac{|n|}{n}[1 + O(|n|^{-2})] \tag{19}$$

(см. (13)).

С помощью известных равенств для бесселевых функций, а также имея в виду, что

$$\frac{1}{n - 1 + \nu\cos^2\theta} + \frac{1}{n + 1 + \nu\cos^2\theta} = \frac{2(n + \nu\cos^2\theta)}{(n + \nu\cos^2\theta)^2 - 1} = \frac{2}{n + \nu\cos^2\theta} +$$
$$+ \frac{2}{[(n + \nu\cos^2\theta)^2 - 1](n + \nu\cos^2\theta)} = \frac{2}{n + \nu\cos^2\theta} + O(|n|^{-3}),$$

находим, что при $|n| \to \infty$

$$J_n'(p_n a) H_n^{(1)\prime}(p_n a) = \frac{-i\sin\theta}{\pi(n + \nu\cos^2\theta)}\left[1 + \frac{n^2\operatorname{tg}^2\theta}{(n+\nu)^2 - \varkappa^2}\right]\frac{|n|}{n}[1 + O(|n|^{-2})]. \tag{20}$$

Умножим теперь уравнение (16а) на $e^{i\alpha\zeta}$, уравнение (17) — на $e^{i\beta\zeta}$, где α и β — пока неопределенные константы, и продифференцируем эти уравнения по ζ. Имея в виду асимптотические формулы (19) и (20), заметим, что

$$\lim_{|n|\to\infty} \frac{\pi(n + \nu\cos^2\theta)(n + \alpha)\sin\theta}{\cos^2\theta\,[(n+\nu)^2 - \varkappa^2]} = \frac{\pi\sin\theta}{\cos^2\theta},$$

$$\lim_{|n|\to\infty} \frac{(n+\beta)\sin\theta}{\pi(n + \nu\cos^2\theta)}\left[1 + \frac{n^2\operatorname{tg}^2\theta}{(n+\nu)^2 - \varkappa^2}\right] = \frac{\sin\theta}{\pi\cos^2\theta},$$

и выберем константы α, β так, чтобы величины

$$\frac{\pi(n+\nu\cos^2\theta)(n+\alpha)\sin\theta}{\cos^2\theta\,[(n+\nu)^2-\varkappa^2]}-\frac{\pi\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\pi\sin\theta\,[(\alpha+\nu\cos^2\theta-2\nu)\,n+\alpha\nu\cos^2\theta+\varkappa^2-\nu^2]}{\cos^2\theta\,[(n+\nu)^2-\varkappa^2]},$$

$$\frac{(n+\beta)\sin\theta}{\pi(n+\nu\cos^2\theta)}\left[1+\frac{n^2\,\mathrm{tg}^2\,\theta}{(n+\nu)^2-\varkappa^2}\right]-\frac{\sin\theta}{\pi\cos^2\theta}=$$

$$=\frac{\sin\theta\,[(\beta+2\nu\cos^2\theta-\nu\cos^2\theta-2\nu)\,n^2+0(|n|)]}{\pi(n+\nu\cos^2\theta)\,[(n+\nu)^2-\varkappa^2]\cos^2\theta}$$

были $0(|n|^{-2})$ при $|n|\to\infty$, т. е. возьмем

$$\alpha=\beta=\nu(2-\cos^2\theta)=\nu(1+\sin^2\theta). \tag{21}$$

Тогда, полагая*

$$\frac{i(n+\alpha)}{p_n^2a^2J_n(p_na)\,H_n^{(1)}(p_na)}=\frac{\pi\sin\theta}{\cos^2\theta}\frac{|n|}{n}(1-\varepsilon_n),$$
$$i(n+\beta)\,J_n'(p_na)\,H_n^{(1)\prime}(p_na)=\frac{\sin\theta}{\pi\cos^2\theta}\frac{|n|}{n}(1-\delta_n), \tag{22}$$

где

$$\varepsilon_n=1-\frac{i\cos^2\theta\,[n+\nu(1+\sin^2\theta)]}{\pi\sin\theta\,p_n^2a^2J_n(p_na)\,H_n^{(1)}(p_na)}\frac{|n|}{n},$$
$$\delta_n=1-\frac{i\pi\cos^2\theta}{\sin\theta}\,[n+\nu(1+\sin^2\theta)]\,J_n'(p_na)\,H_n^{(1)\prime}(p_na)\frac{|n|}{n}, \tag{23}$$

будем иметь при $|n|\to\infty$

$$\varepsilon_n=0(|n|^{-2}),\quad \delta_n=0(|n|^{-2}). \tag{24}$$

Таким образом, из уравнений (16а) и (17) после умножения на $e^{i\nu(1+\sin^2\theta)\zeta}$, дифференцирования по ζ и сокращения на $e^{i\nu(1+\sin^2\theta)\zeta}$ получаем $\left(\frac{ka\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\varkappa}{\cos\theta}\right)$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\frac{|n|}{n}(1-\varepsilon_n)\,e^{in\zeta}-\sin\theta\,[(\varkappa-\nu)(\varkappa+\nu\sin^2\theta)\,N_1e^{i(\varkappa-\nu)\zeta}-$$
$$-(\varkappa+\nu)(\varkappa-\nu\sin^2\theta)\,N_2e^{-i(\varkappa+\nu)\zeta}]=0 \quad \text{(на щели);} \tag{16'a}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n\frac{|n|}{n}(1-\delta_n)\,e^{in\zeta}-\sin\theta\,[(\varkappa-\nu)(\varkappa+\nu\sin^2\theta)\,M_1e^{i(\varkappa-\nu)\zeta}-$$
$$-(\varkappa+\nu)(\varkappa-\nu\sin^2\theta)\,M_2e^{-i(\varkappa+\nu)\zeta}]=0 \quad \text{(на металле).} \tag{17'}$$

Система равенств (16) и (16′а) (соответственно (17′) и (17а)) не полностью эквивалентна равенствам (16) и (16а) (соответственно (17) и (17а)), так как из нее следует только, что производная от левой части. (16а) (соответственно (17)) равна нулю, а сама эта левая часть постоянна. Чтобы удовлетворить уравнению (16а) (соответственно (17)), мы должны обратить в нуль его левую часть хотя бы в одной точке на щели (соответственно на металле). Пусть начало отсчета спиральной координаты ζ помещено в середине одной из щелей. Тогда точки $\zeta=0$ и $\zeta=\pi$ лежат соответственно в середине щели и в середине металлической ленты,

* Считаем $\frac{|0|}{0}=1$.

и дополнительными уравнениями будут следующие (используем еще равенства (22) и (21)):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{n+\nu(1+\sin^2\theta)} \frac{|n|}{n}(1-\varepsilon_n) - \sin\theta\,[(\varkappa-\nu)N_1 + (\varkappa+\nu)N_2] = 0, \tag{25}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n b_n}{n+\nu(1+\sin^2\theta)} \frac{|n|}{n}(1-\delta_n) - \\ - \sin\theta\,[(\varkappa-\nu)e^{i(\varkappa-\nu)\pi}M_1 + (\varkappa+\nu)e^{-i(\varkappa+\nu)\pi}M_2] = 0. \tag{26}$$

Для определения констант M_1, M_2 N_1 и N_2 имеем равенства (15), а также равенства, получающиеся из (15) дифференцированием по ζ, причем те из них, которые относятся к щели, очевидно, достаточно удовлетворить в одной точке $\zeta=0$, а те, которые относятся к металлу,— в одной точке $\zeta=\pi$. В результате получаем

$$\begin{aligned} &\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{\varkappa^2-(n+\nu)^2} = M_1 e^{i(\varkappa-\nu)\pi} + M_2 e^{-i(\varkappa+\nu)\pi}, \\ &\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n (n+\nu)}{\varkappa^2-(n+\nu)^2} = \varkappa\,[M_2 e^{i(\varkappa-\nu)\pi} - M_2 e^{-i(\varkappa+\nu)\pi}]; \\ &\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{\varkappa^2-(n+\nu)^2} = N_1 + N_2, \\ &\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n (n+\nu)}{\varkappa^2-(n+\nu)^2} = \varkappa\,(N_1 - N_2), \end{aligned} \tag{27}$$

а так как

$$\frac{n+\nu}{\varkappa^2-(n+\nu)^2} = \frac{\varkappa^2}{[\varkappa^2-(n+\nu)^2](n+\nu)} - \frac{1}{n+\nu},$$

то, обозначая

$$\eta_n = \frac{(-1)^n}{\varkappa^2-(n+\nu)^2}, \tag{28}$$

можем эти равенства записать в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta_n a_n = M_1 e^{i(\varkappa-\nu)\pi} + M_2 e^{-i(\varkappa+\nu)\pi}; \tag{29}$$

$$\varkappa^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\eta_n a_n}{n+\nu} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n+\nu} = \varkappa\,[M_1 e^{i(\varkappa-\nu)\pi} - M_2 e^{-i(\varkappa+\nu)\pi}]; \tag{30}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \eta_n b_n = N_1 + N_2; \tag{31}$$

$$\varkappa^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \eta_n b_n}{n+\nu} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{n+\nu} = \varkappa\,(N_1 - N_2). \tag{32}$$

Система уравнений (16), (16'a), (17'), (17a), (25), (26), (29), (30), (31) и (32) полностью эквивалентна исходной системе (14—14в). При сделанном нами выборе начала отсчета «спиральной координаты» ζ щель лежит в области, где $|\zeta|<\frac{\pi d}{l}$; металл — где $\frac{\pi d}{l}<|\zeta|<\pi$ и далее с периодом 2π (рис. 1). Заметим, что содержащиеся в равенствах (15) константы M_1 и M_2 (N_1 и N_2) могут иметь различные значения на непересекающихся промежутках ζ, занятых металлической лентой (щелью). Так как при выводе равенств (25), (26) и (29—32) мы брали на щели точку $\zeta=0$, а на металле точку $\zeta=\pi$, то входящие в эти равенства константы M_1 и M_2 (N_1 и N_2) относятся к промежутку $|\zeta-\pi|<\frac{\pi(l-d)}{l}$ (соответственно $\left|\zeta\right|<\frac{\pi d}{l}\right)$.

В соответствии с этим мы запишем системы (16) — (16'а) и (17') — (17а) в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\zeta}=0, \qquad \frac{\pi d}{l}<|\zeta|<\pi,\\
&\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{|n|}{n}(1-\varepsilon_n)e^{in\zeta}-\sin\theta\,[(\varkappa-\nu)(\varkappa+\nu\sin^2\theta)N_1e^{i(\varkappa-\nu)\zeta}-\\
&\quad-(\varkappa+\nu)(\varkappa-\nu\sin^2\theta)N_2e^{-i(\varkappa+\nu)\zeta}]=0, \qquad |\zeta|<\frac{\pi d}{l},
\end{aligned}\right\}\quad (A)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n b_n\frac{|n|}{n}(1-\delta_n)e^{in\xi}-\sin\theta\,[(\varkappa-\nu)(\varkappa+\nu\sin^2\theta)M_1e^{i(\varkappa-\nu)(\pi+\xi)}-\\
&\quad-(\varkappa+\nu)(\varkappa-\nu\sin^2\theta)M_2e^{-i(\varkappa+\nu)(\pi+\xi)}]=0, \qquad |\xi|<\frac{\pi(l-d)}{l},\\
&\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n b_n e^{in\xi}=0, \qquad \frac{\pi(l-d)}{l}<|\xi|<\pi,
\end{aligned}\right\}\quad (B)$$

сделав в последних двух уравнениях замену

$$\zeta-\pi=\xi.$$

Воспользуемся теперь равенством

$$e^{-isx}=\frac{\sin s\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+s}e^{inx}, \qquad |x|<\pi,$$

которое проверяется непосредственным вычислением коэффициентов Фурье, и введем еще обозначения

$$\frac{1}{\pi}\sin\theta\cdot(\varkappa-\nu)(\varkappa+\nu\sin^2\theta)\cdot\sin(\nu-\varkappa)\pi=\alpha(\varkappa;\ \nu;\ \theta), \tag{33}$$

$$M_1e^{i(\varkappa-\nu)\pi}=\tilde{M}_1; \qquad M_2e^{-i(\varkappa+\nu)\pi}=\tilde{M}_2. \tag{34}$$

Тогда системы (A) и (B) перепишутся так:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\zeta}=0, \qquad \frac{\pi d}{l}<|\zeta|<\pi,\\
&\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\frac{|n|}{n}e^{in\zeta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[a_n\frac{|n|}{n}\varepsilon_n+N_1\alpha(\varkappa;\ \nu;\ \theta)\frac{(-1)^n}{n+(\nu-\varkappa)}-\right.\\
&\quad\left.-N_2\alpha(-\varkappa;\ \nu;\ \theta)\frac{(-1)^n}{n+(\nu+\varkappa)}\right]e^{in\zeta}, \qquad |\zeta|<\frac{\pi d}{l};
\end{aligned}\right\}\quad (A')$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n b_n e^{in\xi}=0, \quad \frac{\pi(l-d)}{l}<|\xi|<\pi;\\&\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n b_n\frac{|n|}{n}e^{in\xi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big[(-1)^n b_n\frac{|n|}{n}\delta_n+\tilde{M}_1\alpha(\varkappa;\ \nu;\ \theta)\frac{(-1)^n}{n+(\nu-\varkappa)}-\\&\quad-\tilde{M}_2\alpha(-\varkappa;\ \nu;\ \theta)\frac{(-1)^n}{n+(\nu+\varkappa)}\Big]e^{in\xi},\quad |\xi|<\frac{\pi(l-d)}{l}.\end{aligned}\right\}\quad (B')$$

Подобные системы уравнений рассмотрены в работе [2]. Используя полученные там результаты, можем заменить системы (A') и (B') эквивалентными им равенствами

$$a_m=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\frac{|n|}{n}\varepsilon_n V_m^n\left(\frac{\pi d}{l}\right)+N_1\cdot\alpha(\varkappa;\ \nu;\ \theta)V_m^{[\sigma]}\left(\frac{\pi d}{l};\ \nu-\varkappa\right)-$$
$$-N_2\alpha(-\varkappa;\ \nu;\ \theta)V_m^{[\sigma]}\left(\frac{\pi d}{l};\ \nu+\varkappa\right)+2c_1R_m\left(\frac{\pi d}{l}\right); \tag{35}$$

$$(-1)^m b_m=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n b_n\frac{|n|}{n}\delta_n V_m^n\left(\frac{\pi(l-d)}{l}\right)+\tilde{M}_1\alpha(\varkappa;\nu;\theta)V_m^{[\sigma]}\left(\frac{\pi(l-d)}{l};\ \nu-\varkappa\right)$$
$$-\tilde{M}_2\alpha(-\varkappa;\ \nu;\theta)V_m^{[\sigma]}\left(\frac{\pi(l-d)}{l};\ \nu+\varkappa\right)+2c_2R_m\left(\frac{\pi(l-d)}{l}\right) \tag{36}$$
$$(m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),$$

где c_1 и c_2 — некоторые константы*, величины $R_m(\delta)$, $V_m^n(\delta)$ выражаются через полиномы Лежандра [2], а

$$V_m^{[\sigma]}(\delta;\ s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n V_m^n(\delta)}{n+s}=\frac{(m+1)\pi}{2(m+s)\sin\pi s}[P_m(u)P_{s-1}(u)-$$
$$-P_{m+1}(u)P_{s-1}(u)]\ (u=\cos\delta). \tag{37}$$

С помощью (35) и (36) мы теперь преобразуем уравнения (25), (26), (30) и (32).

В силу (35)

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{a_m\frac{|m|}{m}}{m+\nu(1+\sin^2\theta)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\frac{|n|}{n}\varepsilon_n\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{V_m^n\left(\frac{\pi d}{l}\right)\frac{|m|}{m}}{m+\nu(1+\sin^2\theta)}+$$
$$+N_1\alpha(\varkappa;\ \nu;\ \theta)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{V_m^{[\sigma]}\left(\frac{\pi d}{l};\ \nu-\varkappa\right)\frac{|m|}{m}}{m+\nu(1+\sin^2\theta)}-$$
$$-N_2\alpha(-\varkappa;\ \nu;\ \theta)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{V_m^{[\sigma]}\left(\frac{\pi d}{l};\ \nu+\varkappa\right)\frac{|m|}{m}}{m+\nu(1+\sin^2\theta)}+2c_1\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{R_m\left(\frac{\pi d}{l}\right)\frac{|m|}{m}}{m+\nu(1+\sin^2\theta)}=$$

---

* Можно показать, что $c_1=a_{-1}$, $c_2=-b'_{-1}$.

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n V^n_{[\tilde\sigma]}\left(\frac{\pi d}{l};\ \nu(1+\sin^2\theta)\right) +$$

$$+ N_1 \alpha(\varkappa;\ \nu;\ \theta)\, \tilde V^{[\sigma]}_{[\sigma]}\left(\frac{\pi d}{l};\ \nu-\varkappa;\ \ \nu(1+\sin^2\theta)\right) -$$

$$-N_2\alpha(-\varkappa;\ \nu;\ \theta)\, \tilde V^{[\sigma]}_{[\sigma]}\left(\frac{\pi d}{l};\ \nu+\varkappa;\ \nu(1+\sin^2\theta)\right) + 2c_1 R_{[\tilde\sigma]}\left(\frac{\pi d}{l};\ \nu(1+\sin^2\theta)\right),$$

где

$$R_{[\tilde\sigma]}(\delta;\ s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{R_m(\delta)\frac{|m|}{m}}{m+s} = \frac{\pi}{2\sin\pi s} P_{s-1}(u);$$

$$V^n_{[\tilde\sigma]}(\delta;\ s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{V^n_m(\delta)\frac{|m|}{m}}{m+s} = \frac{\pi}{2\sin\pi s}\,\frac{s-1}{n+s}[P_{s-1}(-u)\,P_{n+1}(u) +$$

$$+ P_{(s-2)}(-u)\,P_n(u)] + \frac{1}{n+s}; \tag{38}$$

$$\tilde V^{[\sigma]}_{[\sigma]}(\delta;\ s_1, s_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{V^{[\sigma]}_m(\delta;\ s_1)\frac{|m|}{m}}{m+s_2} = \frac{\pi^2}{2(s_1-s_2)\sin\pi s_1}\left\{\frac{s_1-1}{\sin\pi s_1}[P_{s_1-1}(-u)\,P_{s_1-2}(u) +\right.$$

$$\left. + P_{s_1-2}(-u)\,P_{s_1-1}(u) - \frac{s_2-1}{\sin\pi s_2}[P_{s_2-1}(-u)\,P_{s_2-2}(u) + P_{s_2-2}(-u)\,P_{s_2-1}(u)]\right\},$$

и

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m a_m}{m+\nu} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{|n|}{n}\varepsilon_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m V^n_m\left(\frac{\pi d}{l}\right)}{m+\nu} +$$

$$+ N_1\alpha(\varkappa;\ \nu;\ \theta) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m V^{[\sigma]}_m\left(\frac{\pi d}{l};\ \nu-\varkappa\right)}{m+\nu} -$$

$$- N_2\alpha(-\varkappa;\ \nu;\ \theta) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m V^{[\sigma]}_m\left(\frac{\pi d}{l};\ \nu-\varkappa\right)}{m+\nu} +$$

$$+ 2c_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m R_m\left(\frac{\pi d}{l}\right)}{m+\nu} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n V^n_{[\sigma]}\left(\frac{\pi d}{l};\ \nu\right) +$$

$$+ N_1\alpha(\varkappa;\ \nu;\ \theta)\, V^{[\sigma]}_{[\sigma]}\left(\frac{\pi d}{l};\ \nu-\varkappa;\ \ \nu\right) - N_2\alpha(-\varkappa;\ \nu;\ \theta)\ \times$$

$$\times V^{[\sigma]}_{[\sigma]}\left(\frac{\pi d}{l};\ \ \nu+\varkappa;\ \nu\right) + 2c_1 R_{[\sigma]}\left(\frac{\pi d}{l};\ \ \nu\right),$$

где

$$R_{[\sigma]}(\delta;\ s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m R_m(\delta)}{m+s} = \frac{\pi}{2\sin\pi s} P_{s-1}(u);$$

$$V^n_{[\sigma]}(\delta;\ s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m V^n_m(\delta)}{m+s} =$$

$$= \frac{s-1}{2(n+s)} \frac{\pi}{\sin \pi s} \left[P_{s-1}(u) P_{n+1}(u) - P_{s-2}(u) P_n(u)\right] \tag{39}$$

$$V^{[\sigma]}_{[\sigma]}(\delta;\ s_1,\ s_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m V^{[\sigma]}_m(\delta;\ s_1)}{m+s_2} = \frac{\pi^2(s_2-1)}{2(s_2-s_1)\sin \pi s_1 \sin \pi s_2} \times$$

$$\times \left[P_{s_1-2}(u) P_{s_2-1}(u) - P_{s_2-2}(u) P_{s_1-1}(u)\right].$$

Обозначая

$$W^n_{[\sigma]}(\delta;\ s) = V^n_{[\sigma]}(\delta;\ s) - \frac{1}{n+s}, \tag{40}$$

можем равенства (25) и (30) записать в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n W^n_{[\sigma]}\left(\frac{\pi d}{l};\ \nu(1+\sin^2\theta)\right) +$$

$$+ N_1\left[\alpha(\varkappa;\ \nu;\ \theta)\,\tilde V^{[\sigma]}_{[\sigma]}\left(\frac{\pi d}{l};\ \nu-\varkappa;\ \nu(1+\sin^2\theta)\right) - (\varkappa-\nu)\sin\theta\right] -$$

$$- N_2\left[\alpha(-\varkappa;\ \nu;\ \theta)\,\tilde V^{[\sigma]}_{[\sigma]}\left(\frac{\pi d}{l};\ \nu+\varkappa;\ \nu(1+\sin^2\theta)\right) + (\varkappa+\nu)\sin\theta\right] +$$

$$+ 2c_1 R_{[\tilde\sigma]}\left(\frac{\pi d}{l};\ \nu(1+\sin^2\theta)\right) = 0; \tag{41}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\left[\frac{\varkappa^2\gamma_n}{n+\nu} - \frac{|n|}{n}\varepsilon_n V^n_{[\tilde\sigma]}\left(\frac{\pi d}{l};\ \nu\right)\right] - N_1 \alpha(\varkappa;\ \nu;\ \theta)\, V^{[\sigma]}_{[\sigma]}\left(\frac{\pi d}{l};\ \nu-\varkappa;\ \nu\right) +$$

$$+ N_2 \cdot \alpha(-\varkappa;\ \nu;\ \theta)\, V^{[\sigma]}_{[\sigma]}\left(\frac{\pi d}{l};\ \nu+\varkappa;\ \nu\right) - 2c_1 R_{[\sigma]}\left(\frac{\pi d}{l};\ \nu\right) -$$

$$- \varkappa \tilde M_1 + \varkappa \tilde M_2 = 0. \tag{42}$$

Используя аналогичным образом (36), из равенств (26) и (32) получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n b_n \frac{|n|}{n} \delta_n W^n_{[\sigma]}\left(\frac{\pi(l-d)}{l};\ \nu(1+\sin^2\theta)\right) +$$

$$+ \tilde M_1\left[\alpha(\varkappa;\ \nu;\ \theta)\,\tilde V^{[\sigma]}_{[\sigma]}\left(\frac{\pi(l-d)}{l};\ \nu-\varkappa;\ \nu(1+\sin^2\theta)\right) - (\varkappa-\nu)\sin\theta\right] -$$

$$- \tilde M_2\left[\alpha(-\varkappa;\ \nu;\ \theta)\,\tilde V^{[\sigma]}_{[\sigma]}\left(\frac{\pi(l-d)}{l};\ \nu+\varkappa;\ \nu(1+\sin^2\theta)\right) + (\varkappa+\nu)\sin\theta\right] +$$

$$+ 2c_2 R_{[\tilde\sigma]}\left(\frac{\pi(l-d)}{l};\ \nu(1+\sin^2\theta)\right) = 0; \tag{43}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n b_n\left[\frac{\varkappa^2\gamma_n}{n+\nu} - \frac{|n|}{n}\delta_n V^n_{[\sigma]}\left(\frac{\pi(l-d)}{l};\ \nu\right)\right] -$$

$$- \tilde M_1 \cdot \alpha(\varkappa;\ \nu;\ \theta)\, V^{[\sigma]}_{[\sigma]}\left(\frac{\pi(l-d)}{l};\ \nu-\varkappa;\ \nu\right) +$$

$$+ \tilde M_2 \cdot \alpha(-\varkappa;\ \nu;\ \theta)\, V^{[\sigma]}_{[\sigma]}\left(\frac{\pi(l-d)}{l};\ \nu+\varkappa;\ \nu\right) -$$

$$- 2c_2 R_{[\sigma]}\left(\frac{\pi(l-d)}{l};\ \nu\right) - \varkappa N_1 + \varkappa N_2 = 0. \tag{44}$$

Таким образом, окончательно имеем бесконечную систему линейных однородных уравнений (29), (31), (35), (36), (41), (42), (43) и (44) с неизвестными a_n, $(-1)^n b_n$, c_1, c_2, $\tilde{M}_1$, $\tilde{M}_2$, N_1 и N_2. Приравнивая нулю определитель этой системы, получаем дисперсионное уравнение.

Сходимость этого определителя обеспечивается тем, что входящие в него параметры ε_n, δ_n и τ_n равны $O(|n|^{-2})$ при $|n| \to \infty$ (см. (24) и (28)).

Этим обстоятельством можно воспользоваться и для численных расчетов, сохраняя в дисперсионном уравнении только конечное число параметров ε_n, δ_n, τ_n, имеющих наибольшие значения, и полагая остальные равными нулю.

3. Укажем еще одну форму для дисперсионного уравнения, которая может оказаться предпочтительнее при численных расчетах (в частности, если все ε_n и δ_n при $n \neq m$ считать равными нулю, что соответствует $(-m)$-му пространственному резонансу). Для этого используем равенства (27). Умножив первое (третье) из них на $\varkappa$, добавим к нему и вычтем из него второе (соответственно четвертое). В результате этого вместо (27) будем иметь

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n+(\nu-\varkappa)} = -2\varkappa\tilde{M}_1, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n+(\nu+\varkappa)} = 2\varkappa\tilde{M}_2,$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{n+(\nu-\varkappa)} = -2\varkappa N_1, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{n+(\nu+\varkappa)} = 2\varkappa N_2 \tag{27'}$$

(мы использовали обозначения (34)).

Рассмотрим теперь системы уравнений (35), (41) и (36), (43), считая в них неизвестными a_n и c_1, соответственно $(-1)^n b_n$ и c_2. Из этих систем, как легко видеть, будем иметь

$$a_n = \beta_n^{(1)}\left(\varepsilon_0, \ \varepsilon_{\pm 1}, \ \ldots, \ \frac{\varkappa d}{l}\right) N_1 + \beta_n^{(2)}\left(\varepsilon_0, \ \varepsilon_{\pm 1}, \ \ldots; \ \frac{\varkappa d}{l}\right) \cdot N_2,$$
$$(-1)^n b_n = \beta_n^{(1)}\left(\delta_0, \ \delta_{\pm 1}, \ \ldots; \ \frac{\varkappa(l-d)}{l}\right) \tilde{M}_1 + \beta_n^{(2)}\left(\delta_0, \ \delta_{\pm 1}, \ \ldots; \ \frac{\varkappa(l-d)}{l}\right) \tilde{M}_2, \tag{45}$$

где $\beta_n^{(1)}(\ldots)$ и $\beta_n^{(2)}(\ldots)$ — коэффициенты, зависящие от указанных в скобках аргументов.

Подставив (45) в (27'), получаем следующую систему четырех линейных однородных уравнений с неизвестными $\tilde{M}_1$, $\tilde{M}_2$, N_1 и N_2:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n^{(1)}\left(\varepsilon_0, \ldots; \frac{\varkappa d}{l}\right)}{n+(\nu-\varkappa)} N_1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n^{(2)}\left(\varepsilon_0, \ldots; \frac{\varkappa d}{l}\right)}{n+(\nu-\varkappa)} N_2 = -2\varkappa\tilde{M}_1;$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n^{(1)}\left(\varepsilon_0, \ldots; \frac{\varkappa d}{l}\right)}{n+(\nu+\varkappa)} N_1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n^{(2)}\left(\varepsilon_0, \ldots; \frac{\varkappa d}{l}\right)}{n+(\nu+\varkappa)} N_2 = 2\varkappa\tilde{M}_2;$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n^{(1)}\left(\delta_0, \ldots; \frac{\varkappa(l-d)}{l}\right)}{n+(\nu-\varkappa)} \tilde{M}_1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n^{(2)}\left(\delta_0, \ldots, \frac{\varkappa(l-d)}{l}\right)}{n+(\nu-\varkappa)} \tilde{M}_2 = -2\varkappa N_1;$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n^{(1)}\left(\delta_0, \ldots; \frac{\pi(l-d)}{l}\right)}{n+(\nu+\varkappa)} \tilde{M}_1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n^{(2)}\left(\delta_0, \ldots; \frac{\pi(l-d)}{l}\right)}{n+(\nu+\varkappa)} \tilde{M}_2 = 2\varkappa N_2.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} &\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n^{(1)}(\varepsilon_0, \ldots; \Delta)}{n+s} = S_1(\varepsilon_0, \ldots; \Delta; s); \\ &\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n^{(2)}(\varepsilon_0, \ldots; \Delta)}{n+s} = S_2(\varepsilon_0, \ldots; \Delta; s); \end{aligned} \tag{46}$$

тогда эту систему можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} S_1\left(\varepsilon_0, \ldots; \frac{\pi d}{l}; \nu-\varkappa\right) & S_2\left(\varepsilon_0, \ldots; \frac{\pi d}{l}; \nu-\varkappa\right) \\ S_1\left(\varepsilon_0, \ldots; \frac{\pi d}{l}; \nu+\varkappa\right) & S_2\left(\varepsilon_0, \ldots; \frac{\pi d}{l}; \nu+\varkappa\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = 2\varkappa \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{M}_1 \\ \tilde{M}_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} S_1\left(\delta_0, \ldots, \frac{\pi(l-d)}{l}; \nu-\varkappa\right) & S_2\left(\delta_0, \ldots; \frac{\pi(l-d)}{l}; \nu-\varkappa\right) \\ S_1\left(\delta_0, \ldots, \frac{\pi(l-d)}{l}; \nu+\varkappa\right) & S_2\left(\delta_0, \ldots; \frac{\pi(l-d)}{l}; \nu+\varkappa\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{M}_1 \\ \tilde{M}_2 \end{pmatrix} = 2\varkappa \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}.$$

Исключая из этих равенств $\tilde{M}_1$ и $\tilde{M}_2$, приходим к системе линейных однородных уравнений с неизвестными N_1 и N_2:

$$\frac{1}{4\varkappa^2} \begin{pmatrix} -S_1\left(\delta_0, \ldots; \frac{\pi(l-d)}{l}; \nu-\varkappa\right) & -S_2\left(\delta_0, \ldots; \frac{\pi(l-d)}{l}; \nu-\varkappa\right) \\ S_1\left(\delta_0, \ldots; \frac{\pi(l-d)}{l}; \nu+\varkappa\right) & S_2\left(\delta_0, \ldots; \frac{\pi(l-d)}{l}; \nu+\varkappa\right) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -S_1\left(\varepsilon_0, \ldots; \frac{\pi d}{l}; \nu-\varkappa\right) & -S_2(\ldots) \\ S_1\left(\varepsilon_0, \ldots; \frac{\pi d}{l}; \nu+\varkappa\right) & S_2(\ldots) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая нулю определитель этой системы, получаем дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$\det\left[\frac{1}{4\varkappa^2} \begin{pmatrix} -S_1\left(\delta_0, \ldots; \frac{\pi(l-d)}{l}; \nu-\varkappa\right) & -S_2(\ldots) \\ S_1\left(\delta_0, \ldots; \frac{\pi(l-d)}{l}; \nu+\varkappa\right) & S_2(\ldots) \end{pmatrix} \times \right.$$

$$\left. \times \begin{pmatrix} -S_1\left(\varepsilon_0, \ldots; \frac{\pi d}{l}; \nu-\varkappa\right) & -S_2(\ldots) \\ S_1\left(\varepsilon_0, \ldots; \frac{\pi d}{l}; \nu+\varkappa\right) & S_2(\ldots) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0. \tag{47}$$

4. Дисперсионное уравнение спирального волновода (47) можно значительно упростить, если предположить ν и $\varkappa$ настолько малыми, что при $s = \nu_1, \nu_2, \nu_3 \ldots$, где $\nu_1 = \nu - \varkappa$, $\nu_2 = \nu + \varkappa$, $\nu_3 = \nu(1 + \sin^2\theta)$, допустимы приближенные равенства:

$$\sin \pi s \approx \pi s; \quad P_s(u) \approx P_0(u) + s\frac{\partial P_s(u)}{\partial s}\Big|_{s=0} = 1 + s\ln\frac{1+u}{2};$$

$$P_{s-1}(u) \approx P_{-1}(u) + s\frac{\partial P_{s-1}(u)}{\partial s}\Big|_{s=0} = 1 - s\ln\frac{1+u}{2}.$$

В этом случае имеем, в частности, для нулевого пространственного резонанса

$$\beta_0^{(1)}\left(\varepsilon_0;\ \frac{\pi d}{l}\right) \approx \frac{\nu_1\nu_3 \sin\theta}{\varepsilon_0 - 1 + \nu_3\ln\frac{1-u}{2}},$$

а так как (см. (23)) $\varepsilon_0 - 1 = -\frac{\nu_3 \sin\theta}{2\nu_1\nu_2 I_0(q_0a)K_0(q_0a)}$, $(p_0 = iq_0)$, то

$$\beta_0^{(1)}\left(\varepsilon_0;\ \frac{\pi d}{l}\right) \approx -2\nu_1^2\nu_2 I_0(q_0a)K_0(q_0a).$$

Далее находим

$$S_1\left(\varepsilon_0;\ \frac{\pi d}{l};\ \nu - \varkappa\right) = -2\nu_1\left[\nu_2 I_0(q_0a)K_0(q_0a) - \nu_1\sin\theta\ln\cos\frac{\pi d}{2l}\right];$$

$$S_1\left(\varepsilon_0;\ \frac{\pi d}{l};\ \nu + \varkappa\right) = -2\nu_1^2\left[I_0(q_0a)K_0(q_0a) - \sin\theta\ln\cos\frac{\pi d}{2l}\right].$$

Меняя в этих выражениях местами величины ν_1 и ν_2, получаем

$$S_2\left(\varepsilon_0;\ \frac{\pi d}{l};\ \nu - \varkappa\right) \approx 2\nu_2^2\left[I_0(q_0a)K_0(q_0a) - \sin\theta\ln\cos\frac{\pi d}{2l}\right];$$

$$S_2\left(\varepsilon_0;\ \frac{\pi d}{l};\ \nu + \varkappa\right) \approx 2\nu_2\left[\nu_1 I_0(q_0a)K_0(q_0a) - \nu_2\sin\theta\ln\cos\frac{\pi d}{2l}\right].$$

Используя затем равенство (см. (23))

$$\delta_0 - 1 = \frac{-i\pi\cos^2\theta\cdot\nu_3}{\sin\theta}J_0'(p_0a)H_0^{(1)\prime}(p_0a) = \frac{-2\cos^2\theta}{\sin\theta}\nu_3 I_1(q_0a)K_1(q_0a),$$

аналогичным образом находим

$$\beta_0^{(1)}\left(\delta_0;\frac{\pi(l-d)}{l}\right) \approx -\frac{\nu_1\sin\theta}{2\left[\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}I_1(q_0a)K_1(q_0a) - \ln\cos\frac{\pi d}{2l}\right]};$$

$$S_1\left(\delta_0;\ \frac{\pi(l-d)}{l};\ \nu - \varkappa\right) \approx -\frac{\sin\theta}{2\left[\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}I_1(q_0a)K_1(q_0a) - \ln\cos\frac{\pi d}{2l}\right]};$$

$$S_1\left(\delta_0;\ \frac{\pi(l-d)}{l};\ \nu + \varkappa\right) \approx -\frac{\frac{\nu_2}{\nu_1}\sin\theta}{2\left[\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}I_1(q_0a)K_1(q_0a) - \ln\cos\frac{\pi d}{2l}\right]};$$

$$S_2\left(\delta_0;\frac{\pi(l-d)}{l};\ \nu - \varkappa\right) \approx \frac{\frac{\nu_2}{\nu_1}\sin\theta}{2\left[\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}I_1(q_0a)K_1(q_0a) - \ln\cos\frac{\pi d}{2l}\right]};$$

$$S_2\left(\delta_0;\frac{\pi(l-d)}{l};\ \nu + \varkappa\right) \approx \frac{\sin\theta}{2\left[\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}I_1(q_0a)K_1(q_0a) - \ln\cos\frac{\pi d}{2l}\right]}.$$

Обозначая элементы определителя в левой части равенства (47) через A_{ik} $(i,\ k=1,\ 2)$, получим для них следующие приближенные выражения:

$$A_{11}\approx\frac{2\nu_1\sin\theta\left[\nu_2 I_0(q_0a)K_0(q_0a)-\nu_1\sin\theta\ln\cos\frac{\pi d}{2l}\right]+2\nu_1\nu_2\sin\theta\left[I_0(q_0a)K_0(q_0a)-\sin\theta\ln\cos\frac{\pi d}{2l}\right]}{8\varkappa^2\left[\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}I_1(q_0a)K_1(q_0a)-\ln\cos\frac{\pi d}{2l}\right]}-1;$$

$$A_{12}\approx-\frac{2\nu_2^2\sin\theta\left[I_0(q_0a)K_0(q_0a)-\sin\theta\ln\cos\frac{\pi d}{2l}\right]+\frac{2\nu_2^2}{\nu_1}\sin\theta\left[\nu_1 I_0(q_0a)K_0(q_0a)-\nu_2\sin\theta\ln\cos\frac{\pi d}{2l}\right]}{8\varkappa^2\left[\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}I_1(q_0a)K_1(q_0a)-\ln\cos\frac{\pi d}{2l}\right]};$$

$$A_{21}\approx-\frac{2\frac{\nu_1^2}{\nu_2}\sin\theta\left[\nu_2 I_0(q_0a)K_0(q_0a)-\nu_1\sin\theta\ln\cos\frac{\pi d}{2l}\right]+2\nu_1^2\sin\theta\left[I_0(q_0a)K_0(q_0a)-\sin\theta\ln\cos\frac{\pi d}{2l}\right]}{8\varkappa^2\left[\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}I_1(q_0a)K_1(q_0a)-\ln\cos\frac{\pi d}{2l}\right]};$$

$$A_{22}\approx\frac{2\nu_1\nu_2\sin\theta\left[I_0(q_0a)K_0(q_0a)-\sin\theta\ln\cos\frac{\pi d}{2l}\right]+2\nu_2\sin\theta\left[\nu_1 I_0(q_0a)K_0(q_0a)-\nu_2\sin\theta\ln\cos\frac{\pi d}{2l}\right]}{8\varkappa^2\left[\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}I_1(q_0a)K_1(q_0a)-\ln\cos\frac{\pi d}{2l}\right]}-1.$$

Таким образом, в рассматриваемом нами случае дисперсионное уравнение (47), т. е. уравнение

$$A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}=0,$$

можно приближенно записать в виде

$$1-\frac{\operatorname{tg}^2\theta}{4\varkappa^2}\,\frac{4\nu_1\nu_2 I_0(q_0a)K_0(q_0a)-(\nu_1+\nu_2)^2\sin\theta\ln\cos\frac{\pi d}{2l}}{I_1(q_0a)K_1(q_0a)-\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\ln\cos\frac{\pi d}{2l}}=0,$$

или

$$1-\frac{\operatorname{tg}^2\theta\left[(\nu^2-\varkappa^2)I_0(q_0a)K_0(q_0a)-\nu^2\sin\theta\ln\cos\frac{\pi d}{2l}\right]}{\varkappa^2\left[I_1(q_0a)K_1(q_0a)-\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\ln\cos\frac{\pi d}{2l}\right]}=0;$$

при θ малом это уравнение совпадает с уравнением, полученным в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Erdelyi. Higher transcendental functions. II. New-Jork—Toronto—London, 122, 1953.

2. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках. ЖТФ, XXXII, вып. 4, 381, 1962.

3. Н. Н. Смирнов. Распространение электромагнитных волн в круглых волноводах с периодическими щелями. ЖТФ, XXVIII, вып 7, 1494, 1958.