

## СВОЙСТВА РЕЗОНАНСНЫХ ЦЕПЕЙ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

## Введение

Резонансные цепи радиоэлектроники подробно рассмотрены в учебной и в научно-технической литературе. Разработаны методики их преобразования на резонансной частоте. Однако развитие компьютерного моделирования ставит новые требования к теории электрических цепей, в частности к резонансным цепям. Особенно это касается частотных зависимостей электрических параметров. Кроме того, актуально теоретическое рассмотрение дуальных преобразований цепей в целом и их отдельных частей не только с точки зрения их упрощения, но с позиции эквивалентного распределения передаваемой мощности в элементах структуры цепи. Вопросы дуальности и эквивалентности возникают в процессе анализа и синтеза любой реально существующей цепи. Однако трактовка понятий эквивалентности и дуальности в справочной литературе [1] является неполной, а иногда некорректной. Например, элементы  $L$  и  $C$  считаются взаимно дуальными, а не взаимно обратными, и многое другое.

Понятие дуальности возникло в 40-х годах прошлого столетия в трудах В. Кауэра. Применяя это понятие в технической литературе, его следует рассматривать с учетом структурного закона в теории электрических цепей [2]. Структурный закон касается двух дуальных электрических цепей с одинаковым количеством элементов (параметры одной из них известны). Его суть состоит в том, что новую структуру получают из известной структуры согласно принципу дуальности путем пересчета параметров. Это количественно выражается так: *произведение сопротивлений каждой дуальной пары ветвей равно квадрату модуля входного сопротивления цепи заданной структуры или в случае самодуальных структур, состоящих из звезд и многоугольников, определителю звезды сопротивлений или многоугольника.*

Например, для резистивных цепей:

$$r_k R_k = R_{\text{вх}}^2, \quad (1)$$

где  $r_k$  принадлежит одной цепи, а  $R_k$  – другой;

для  $R, L, C$  цепей:

$$\underline{z}_k \bar{Z}_k = Z_{\text{вх}}^2, \quad (2)$$

где известный параметр записывают в комплексно-сопряженном виде, с целью исключить изменения типа реактивности (чтобы индуктивное сопротивление не оказалось емкостным или наоборот).

Рассмотрим применение структурного закона для анализа дуальных резистивных, реактивных и резонансных двухполюсников.

## Резистивные цепи

Понятие дуальности следует рассматривать отдельно для структуры цепей и их «содержания». Под «содержанием» следует понимать как характер параметров (активные и реактивные), так и тип электрической величины: ток, напряжение, мощность.

В отличие от существующего определения [1], понятие *дуальность* целесообразно определить как *двойственность структурных решений при синтезе цепей с целью получения одинакового результата при выполнении задач передачи и распределения электрической энергии*. Такая формулировка по умолчанию увязывает два принципа: дуальность и эквивалентность. Определение эквивалентности цепей с учетом дуальности включает одинаковое

распределение мощности по элементам рассматриваемых структур, а не ограничивается равенством входных сопротивлений.

Чтобы перейти к схемам трехэлементных резонансных цепочек (рассмотренных ниже) проанализируем схемы трехэлементных резистивных двухполюсников. Резистивные двухполюсники (рис. 1) относятся к классу однородных цепей, поскольку образованы однотипными элементами.

Для анализа дуальных структур необходимо обеспечить различия в обозначениях дуальных элементов при записи структурного закона. В работе используются такие правила обозначения: все последовательно соединенные элементы обозначены прописными буквами, а параллельные – заглавными, например, для пар дуальных схем (рис.1,  $a - в$ ,  $б - з$ ):  $r_1 \leftrightarrow R_1$ ,  $r_2 \leftrightarrow R_2$ ,  $r_3 \leftrightarrow R_3$ . Что касается частично дуальных схем, используется такая индексация:  $r_2 \leftrightarrow R_6$ ,  $r_3 \leftrightarrow R_7$  (рис.1,  $a - б$ ) и  $r_7 \leftrightarrow R_3$ ,  $r_6 \leftrightarrow R_2$  (рис.1,  $в - з$ ).

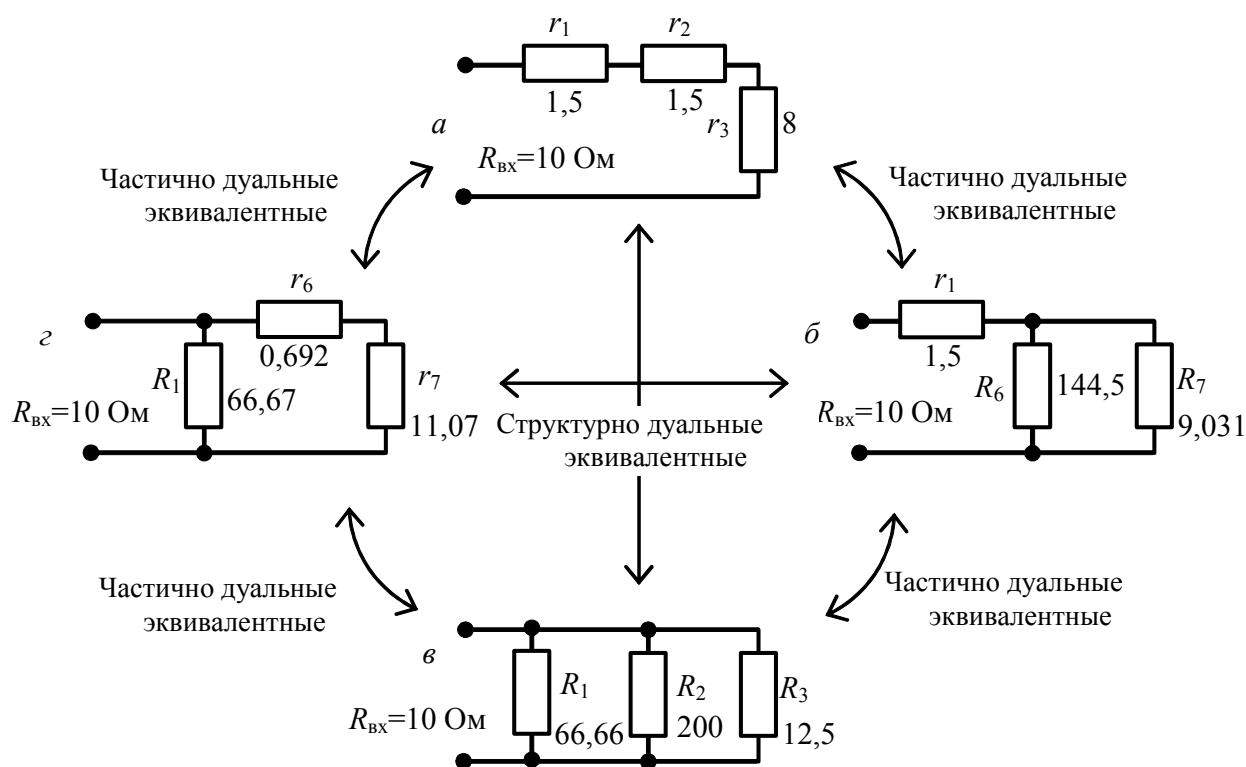


Рис.1. Дуальные и частично дуальные резистивные двухполюсники

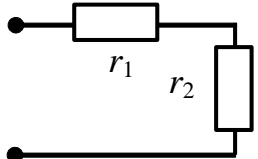
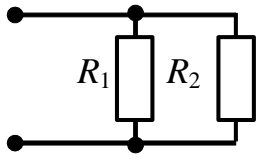
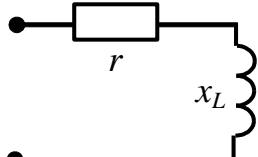
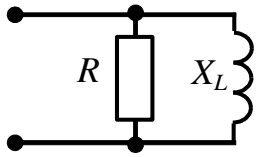
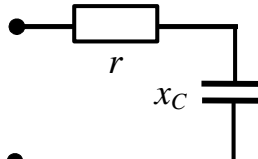
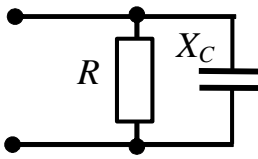
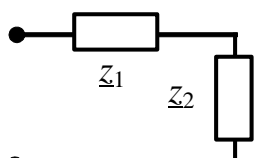
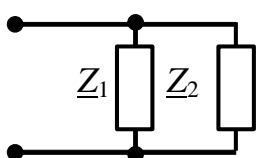
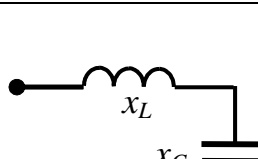
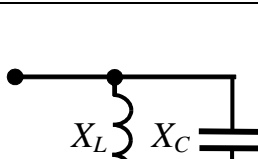
### Элементарные двухполюсники

В теории цепей используют различные элементарные двухполюсники, в частности (таблица):

- 1) пара последовательно и параллельно соединенных резисторов;
- 2) двухэлементная схема катушки индуктивности [3];
- 3) двухэлементная схема конденсатора [3];
- 4) пара последовательно и параллельно включенных комплексных сопротивлений;
- 5) последовательное и параллельное соединение идеальных реактивных элементов.

Рассмотрим применение структурного закона к элементарным двухполюсникам. В колонке 3 таблицы записаны формулы структурного закона (1) – (2) применительно к каждому виду двухполюсников. Здесь же приведена формула входного сопротивление для обоих вариантов соединения. Используют соотношения того вида соединения, параметры которого

известны или заданы. Что касается соединений реактивных элементов, то они рассмотрены из предположения, что заданы параметры последовательной схемы.

№	Последовательные	Структурный закон	Параллельные
1		$r_1 R_1 = R_{\text{BX}}^2; \quad r_2 R_2 = R_{\text{BX}}^2$ $R_{\text{BX}}^2 = (r_1 + r_2)^2 = \left( \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)^2$	
2		$rR = Z_{\text{BX}}^2; \quad x_L X_L = Z_{\text{BX}}^2$ $Z_{\text{BX}}^2 = r^2 + x_L^2 = \frac{1}{G^2 + B_L^2}$	
3		$rR = Z_{\text{BX}}^2; \quad x_C X_C = Z_{\text{BX}}^2$ $Z_{\text{BX}}^2 = r^2 + x_C^2 = \frac{1}{G^2 + B_C^2}$	
4		$\underline{z}_1 \bar{Z}_1 = Z_{\text{BX}}^2; \quad \underline{z}_2 \bar{Z}_2 = Z_{\text{BX}}^2$ $Z_{\text{BX}}^2 =  \underline{z}_1 + \underline{z}_2 ^2 = \frac{1}{ \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 ^2}$	
5		$z_L(j\omega) = j\omega\rho; \quad z_C(j\omega) = \frac{\rho}{j\omega}$ $z_{\text{BX}}(j\omega) = j\rho \frac{\omega^2 - 1}{\omega}$ $z_{\text{BX}}^2(\omega) = \rho^2 \frac{(\omega^2 - 1)^2}{\omega^2}$	

На рис. 2 показаны результаты расчета параметров идеальных реактивных двухполюсников по формулам для последовательного и параллельного соединения ( $\omega = w/w_0$  – относительная частота,  $w$  – текущая частота,  $w_0$  – резонансная частота):

$$\rho = 20 \text{ Ом}; \quad Z_L(j\omega) = \frac{z_{\text{BX}}^2(\omega)}{-z_L(j\omega)} = j\rho \frac{(\omega^2 - 1)^2}{\omega^3}; \quad Z_C(j\omega) = \frac{z_{\text{BX}}^2(\omega)}{-z_C(j\omega)} = -j\rho \frac{(\omega^2 - 1)^2}{\omega};$$

$$Z_{\text{BX}}(j\omega) = \frac{Z_L(j\omega)Z_C(j\omega)}{Z_L(j\omega) + Z_C(j\omega)}.$$

Графики (рис. 2) подтверждают выполнение структурного закона, в частности равенство сопротивлений  $z_{\text{BX}}(\omega) = Z_{\text{BX}}(\omega)$ .

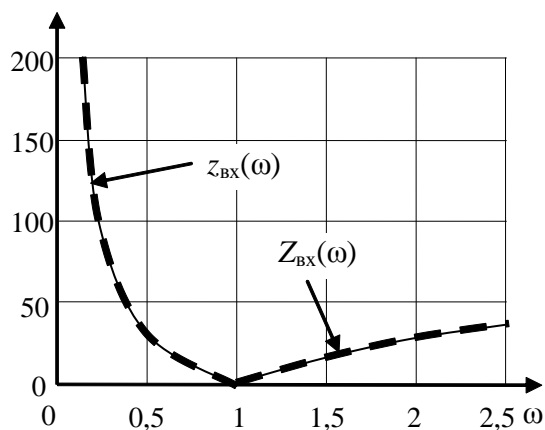


Рис.2. Пример расчета характеристик реактивных двухполюсников

### Резонансные двухполюсники

На рис. 3 представлены четыре варианта резонансных схем. Схемы (рис. 3, а, в) соответствуют классическим резонансным контурам. Здесь они рассмотрены как взаимно дуальные и эквивалентные по входу и распределению мощности по всем трем элементам. Однако коэффициенты передачи рассмотрены ниже только по отношению к емкости. Две другие дуальные и эквивалентные схемы показаны на рис. 3, б, д. Следует заметить, что цепочки (рис. 3, б, д) с точки зрения трансформации идеальных реактивных сопротивлений из параллельной схемы в последовательный вариант или обратно ранее нигде не рассматривались. Кроме того, из-за наличия идеальных реактивных элементов все четыре практически не реализуемы, кроме исходной схемы (рис. 3, а). Впрочем, и она условно реализуема, за счет наличия конденсаторов с высокой добротностью. Ниже рассмотрен анализ всех схем в частотной области с использованием структурного закона.

**1. Последовательный резонансный контур** (рис. 3, а). Параметры контура:  $r_1 = 1 \text{ Ом}$ ;  $x_{L1} = x_{C1} = \rho = 20 \text{ Ом}$ ;  $Q = \rho / r_1 = 20$ ;  $D = 1/Q = 1/20$ . Для определения индуктивности и емкости следует выбрать базовую частоту  $\omega_0 = 2\pi f_0$ , на которой вычислены  $\underline{z}_{L1} = jx_{L1}$  и  $\underline{z}_{C1} = x_{C1} / j$ :  $L = \rho / \omega_0$ ;  $C = 1 / \omega_0 \rho$ . Расчет частотных характеристик удобнее выполнять для относительной частоты  $\omega = \omega / \omega_0$ .

Параметры цепи в частотной области представим так:

$$z_{L1}(j\omega) = j\omega\rho; \quad z_{C1}(j\omega) = \rho / j\omega; \quad z_{\text{BX}1}(j\omega) = r_1 + j\rho(\omega - 1/\omega).$$

Коэффициент передачи по напряжению  $H_{C1}(j\omega)$  здесь соответствует коэффициенту передачи по мощности  $M_{C1}(j\omega)$ :

$$M_{C1}(j\omega) = H_{C1}(j\omega) = \frac{z_{C1}(j\omega)}{z_{\text{BX}1}(j\omega)} = \frac{1}{j\omega(D + j(\omega - 1/\omega))}.$$

**2. Параллельный резонансный контур** (рис. 3, в). Для расчета параметров параллельного контура запишем квадрат модуля входного сопротивления исходной схемы с известными параметрами:

$$\Delta_1(\omega) = r_1^2 + \rho^2 (\omega - 1/\omega)^2 \text{ Ом}^2.$$

Далее используем структурный закон, учитывая зависимость сопротивлений элементов схем от частоты:

$$R_3(\omega) = \frac{\Delta_1(\omega)}{r_1} = r_1 \left[ 1 + Q^2 \frac{(\omega^2 - 1)^2}{\omega^2} \right]; \quad Z_{L3}(j\omega) = \frac{\Delta_1(\omega)}{z_{L1}(j\omega)} = j\omega\rho \left[ \frac{D^2}{\omega^2} + \frac{(\omega^2 - 1)^2}{\omega^4} \right];$$

$$Z_{C3}(j\omega) = \frac{\Delta_1(\omega)}{z_{C1}(j\omega)} = \frac{\rho}{j\omega} \left[ D^2\omega^2 + (\omega^2 - 1)^2 \right].$$

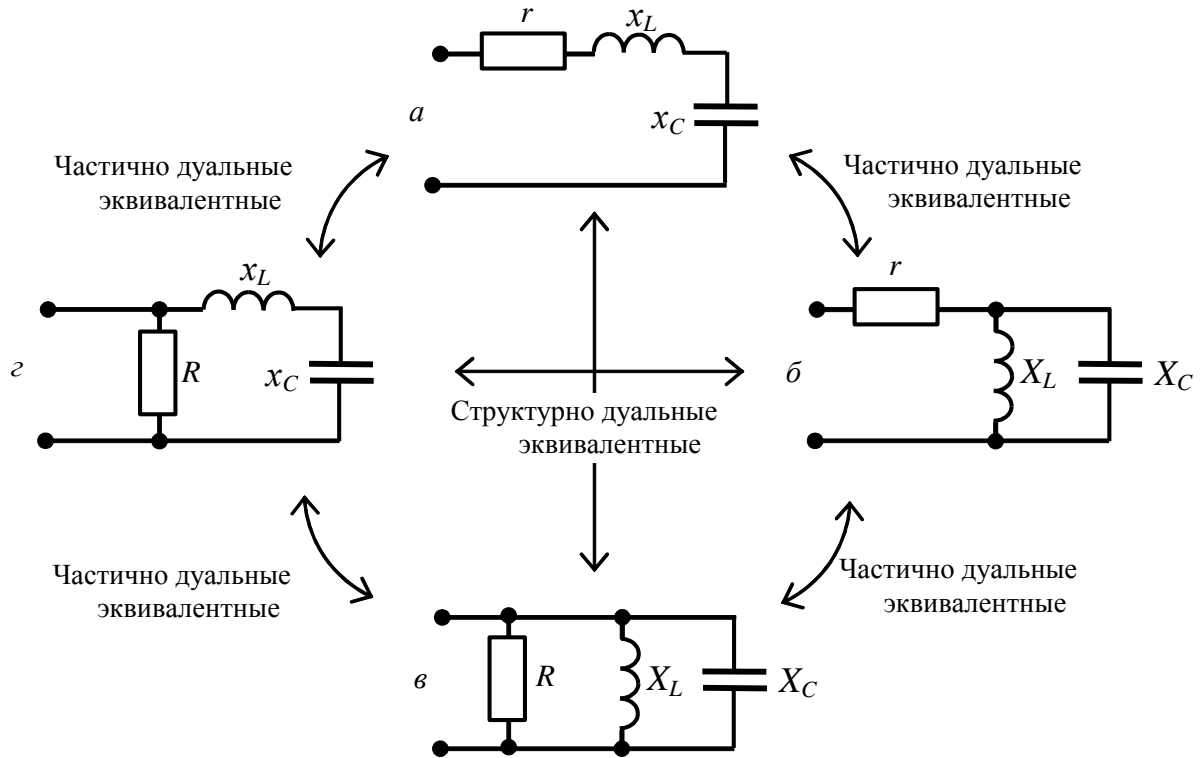


Рис. 3. Дуальные и частично дуальные резонансные двухполюсники

Отметим, что приведенные выше зависимости параметров параллельного контура по отношению к параметрам последовательного отличаются четко выраженными коэффициентами, зависящими от частоты и добротности:

$$f_R(\omega) = 1 + Q^2 \frac{(\omega^2 - 1)^2}{\omega^2}; \quad f_L(\omega) = \frac{D^2}{\omega^2} + \frac{(\omega^2 - 1)^2}{\omega^4}; \quad f_C(\omega) = D^2\omega^2 + (\omega^2 - 1)^2.$$

С учетом этих коэффициентов все сопротивления параллельного контура можно записать иначе:

$$R_3(\omega) = r_1 \frac{f_C(\omega)}{D^2\omega^2}; \quad Z_{L3}(j\omega) = j\omega\rho \frac{f_C(\omega)}{\omega^4}; \quad Z_{C3}(j\omega) = \frac{\rho}{j\omega} f_C(\omega).$$

Для расчета параметров схемы используем именно эти зависимости.

Входное сопротивление параллельного контура можно определить с использованием проводимости или прямого расчета в комплексной форме:

$$Z_{\text{вх}3}(j\omega) = \frac{1}{Y_{\text{вх}}(j\omega)} = \frac{D^2\omega^2 + (\omega^2 - 1)^2}{gD^2\omega^2 - j\sigma(\omega^2 - 1)/\omega} = r_1 + j\rho \left( \omega - \frac{1}{\omega} \right);$$

где  $Y_{\text{вх}3}(j\omega) = \frac{1}{R_3(\omega)} + \frac{1}{Z_{L3}(j\omega)} + \frac{1}{Z_{C3}(j\omega)} = \frac{gD^2\omega^2 - j\sigma(\omega^2 - 1)/\omega}{D^2\omega^2 + (\omega^2 - 1)^2}; \quad \sigma = \frac{1}{\rho};$

$$Z_{\text{BX}3}(j\omega) = \frac{R_3(\omega)Z_{L3}(j\omega)Z_{C3}(j\omega)}{R_3(\omega)Z_{L3}(j\omega) + Z_{L3}(j\omega)Z_{C3}(j\omega) + Z_{C3}(j\omega)R_3(\omega)} = r_1 + j\rho \left( \omega - \frac{1}{\omega} \right).$$

В параллельном контуре коэффициент передачи по току соответствует коэффициенту передачи по мощности, но в сопряженном виде:

$$T_3(j\omega) = \frac{Z_{\text{BX}3}(j\omega)}{Z_{C3}(j\omega)} = \frac{j\omega D - (\omega^2 - 1)}{D^2\omega^2 + (\omega^2 - 1)^2} = \frac{-1}{\omega^2 - 1 + j\omega D}; \quad M_3(j\omega) = \bar{T}_3(j\omega).$$

Графики рис. 4 иллюстрируют идентичность частотных характеристик (в виде входных сопротивлений и коэффициентов передачи мощности, относящейся к емкости) двух эквивалентных резонансных цепей (рис. 3, а, в). Физическая реализация описанных структур затруднена. Однако при разработке цифровых фильтров подобные представления окажутся востребованными.

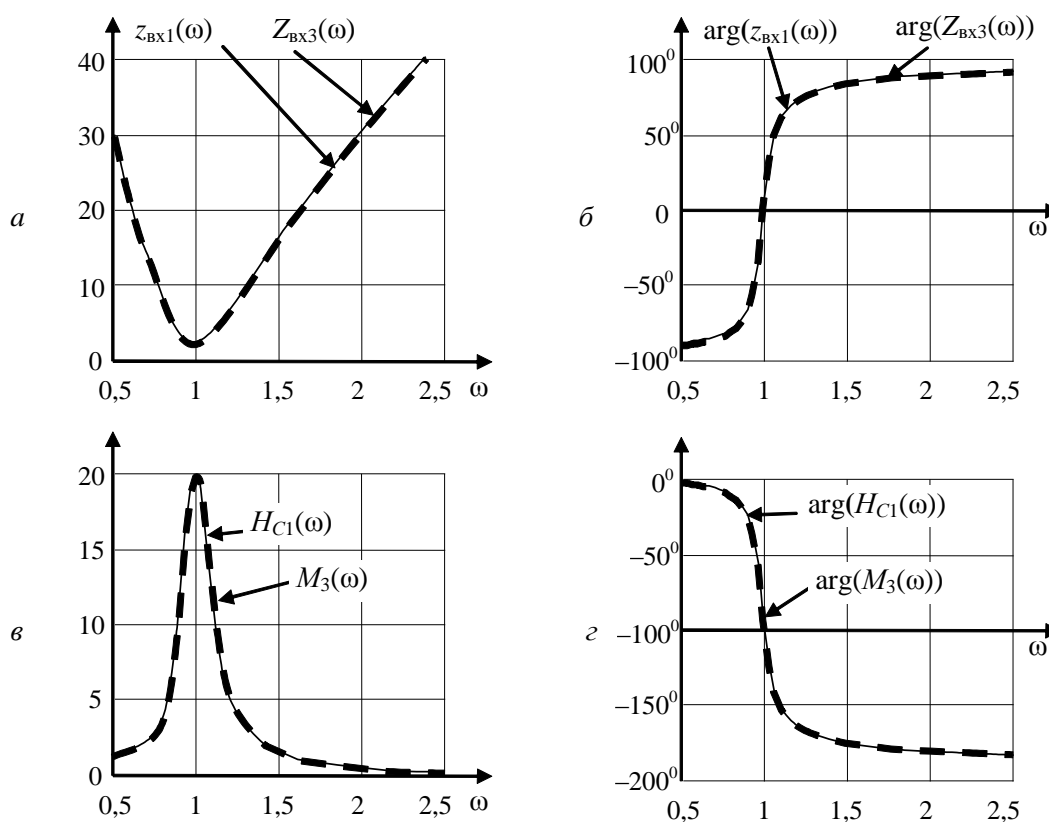


Рис.4. Частотные характеристики резонансных контуров:  
а, б – модуль и аргумент входного сопротивления;  
в, г – АЧХ и ФЧХ коэффициента передачи

**3. Преобразованный последовательный контур** (рис. 3, б). Последовательный контур (рис. 3, а) может быть эквивалентно преобразован в виде трёх структурных вариантов. Преобразуются: сопротивление активное и индуктивное, или активное и емкостное, или два реактивных в параллельный вариант.

Непреобразованный элемент соединяют последовательно к параллельному участку. Представляется интересным вариант с преобразованием реактивных сопротивлений (рис. 3, б), поскольку другие преобразования в этой работе уже отражены. Сумма реактивных сопротивлений преобразуемого контура:

$$Z_1(j\omega) = z_{L1}(j\omega) + z_{C1}(j\omega) = j\omega\rho + \frac{\rho}{j\omega} = j\rho \left( \omega - \frac{1}{\omega} \right).$$

Определив квадрат модуля этой суммы  $\Delta_2(\omega) = \rho^2 \left( \omega - \frac{1}{\omega} \right)^2$ , в соответствии со структурным законом находим параллельные составляющие, которые кроме величин преобразуемой схемы содержат частотно зависимые коэффициенты  $\frac{(\omega^2 - 1)^2}{\omega^4}$  и  $(\omega^2 - 1)^2$ :

$$Z_{L2}(j\omega) = \frac{\Delta_2(\omega)}{z_{L1}(j\omega)} = \frac{\rho^2 (\omega - 1/\omega)^2}{-j\omega\rho} = j\omega\rho \frac{(\omega^2 - 1)^2}{\omega^4};$$

$$Z_{C2}(j\omega) = \frac{\Delta_2(\omega)}{z_{C1}(j\omega)} = \frac{\rho^2 (\omega - 1/\omega)^2}{-\rho/j\omega} = \frac{\rho}{j\omega} (\omega^2 - 1)^2.$$

$$\text{Входное сопротивление: } Z_{\text{вх}2}(j\omega) = r_1 + \frac{Z_{L2}(j\omega) \cdot Z_{C2}(j\omega)}{Z_{L2}(j\omega) + Z_{C2}(j\omega)} = r_1 + j\rho \frac{\omega^2 - 1}{\omega}.$$

Коэффициенты передачи:

$$H_2(j\omega) = \frac{Z_2(j\omega)}{Z_{\text{вх}2}(j\omega)} = \frac{1}{1 - jD \frac{\omega}{\omega^2 - 1}}; \quad T_2(\omega) = \frac{Z_{L2}(j\omega)}{Z_{L2}(j\omega) + Z_{C2}(j\omega)} = \frac{1}{1 - \omega^2};$$

$$M_2(\omega) = H_2(\omega)T_2(\omega).$$

Коэффициент передачи по току здесь величина вещественная, поскольку нет необходимости в информации о сопряженности при определении КПД.

**4. Преобразованный параллельный контур** (рис. 3, з). Коэффициенты передачи по напряжению, по току и мощности:

$$H_4(\omega) = \frac{Z_{C4}(j\omega)}{Z_4(j\omega)} = \frac{1}{1 - \omega^2}; \quad T_4(j\omega) = \frac{R_3(\omega)}{R_3(\omega) + Z_4(j\omega)} = \frac{\omega^2 - 1}{f_C(\omega)} (\omega^2 - 1 - j\omega D);$$

$$M_4(j\omega) = H_4(\omega) \cdot \bar{T}_4(j\omega).$$

### Заключение

Частотные характеристики резонансных двухполюсников, представленные в аналитической и графической форме, отражают общую тенденцию, подобную характеру зависимостей в резистивных цепях.

Анализируя дуальные резистивные (рис. 1) и резонансные цепи (рис. 3), можно сделать вывод, что структура не является основным фактором в распределении энергии по элементам. Определяющими являются значения и тип элементов цепи. Результат распределения мощности по элементам схем одинаков как для совокупности дуальных резистивных (рис. 1), так и резонансных (рис. 3) двухполюсников.

Новые представления о частотных преобразованиях резонансных цепей могут быть полезными при цифровом моделировании, например, разного рода фильтров.

### Список литературы:

1. Теоретические основы электротехники. Справочник по теории электрических цепей ; под ред. Ю.А. Бычкова, В.М. Золотниченко, Э.П. Чернышова. СПб. : Питер, 2008. 349 с.
2. Лебедев П. Ф. Структурный закон двух дуальных электрических цепей с одинаковым числом элементов. Свидетство про регистрацию авторского права на твор. №59909. Дата регистрации 29.05.2015.
3. Схемы замещения конденсаторов и катушек индуктивности / П.Ф. Лебедев, В.П. Дробышева // Радиотехника. 2012. Вып. 171. С. 306-312.