УДК 621.373.826:53.088.23

Ю.П. МАЧЕХИН, д-р техн. наук, проф., Ю.С. КУРСКОЙ, канд. техн. наук, доц., А.С. ГНАТЕНКО

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗМЕРЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Введение

В работе [1] академик В.Л. Гинзбург писал: «…Внимание к нелинейной физике все усиливается и усиливается…». В списке «особенно важных и интересных проблем» он отметил: нелинейную физику, турбулентность, солитоны, хаос, странные аттракторы. Действительно, решение задач распространения сверхкоротких импульсов в средах, появление и управление хаотическим режимом в оптоэлектронных устройствах (лазерах) и иных физических системах, создание и использование солитонов с заданными характеристиками, стабилизация характеристик лазерного излучения – имеют важное значение для прикладной оптики, лазерной физики, создания солитонных телекоммуникационных систем и сетей [2].

Лазеры, солитоны, генерируемые волоконными лазерами, и иные объекты с нелинейно меняющимися характеристиками относятся к нелинейным динамическим системам (НДС) [3]. Трудности создания и управления НДС с заданными параметрами объясняются такими свойствами как: диссипативность, нелинейная динамика характеристик НДС (динамических переменных (ДП)); сильная зависимость от изменения начальных условий и шумов; возможность хаотического режима; эволюция и короткое время прогноза. Выделяют консервативные и диссипативные НДС, при этом консервативность часто условна.

Успешность создания и управления НДС зависит от моделей и принципов измерений их характеристик. При этом очевидны противоречия между классической теорией измерения [4], детерминированной в своей основе, и стохастичной или хаотичной динамикой НДС [5]. Одной из первых работ, в которых был предложен недетерминированный подход к измерениям в НДС, была работа, посвященная решению задачи стабилизации частоты лазера [6]. В ней предложен фрактальный метод классификации динамики частоты лазера, позволяющий сделать вывод о регулярности, стохастичности или хаотичности колебания частоты. В работах [7, 8] недетерминированный подход к измерению ДП НДС получил свое развитие. Стало очевидным, что для устранения противоречия между базисными положениями классической теории измерения и реальной динамикой НДС нужна принципиально новая теория измерения в НДС (теория нелинейных измерений или нелинейная метрология) [8]. В ее основу положены принципы междисциплинарных теорий информации, открытых систем, динамического хаоса, фрактального, энтропийного и интервального анализа и ряда других.

Цель работы – формулировка физико-математических основ измерений в физических нелинейных динамических системах.

Лазер как НДС

Сегодня все больше объектов окружающего мира рассматриваются как НДС. В монографии [5], посвященной синергетическим эффектам в различных НДС, проводится аналогия между динамикой процессов, происходящих в лазерах, нелинейной оптике, в моделях химических реакциях, в биологических организмах и популяциях. НДС рассматриваются как непрерывно распределенные системы с флуктуациями ДП $X_i(t)$. При этом, в случае лазера или солитона, ДП характеризуют: напряженность электромагнитного поля, пиковую мощность, частоту и поляризацию излучения, длительность импульса; в нелинейной оптике они описывают амплитуды нескольких взаимодействующих мод или диэлектрическую проницаемость среды. При этом ДП можно описать нелинейным модельным уравнением вида

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = G_i(\nabla, X_i) + D_i\nabla^2 X_i + F_i(t)\,, \qquad (1)$$

где G_i – нелинейная функция $X_i(t)$ и градиента ∇X; D_i – коэффициент, описывающий диффузию (действительная величина) или распространение волн (мнимая величина); $F_i(t)$ – флуктуирующие силы, обусловленные взаимодействием с внешними факторами и диссипацией.

Из уравнения (1) выводятся уравнения для незатухающих мод, возрастающих до макроскопических значений и определяющих динамику системы в окрестностях точек неустойчивости. Эти моды описывают зарождение пространственно-временной структуры – аттрактора [5]. Для лазера по схеме уравнения (1) может быть выведено полевое уравнение, описывающее временную эволюцию амплитуды моды, находящейся под действием двух сил – вынуждающей и стохастической, вида

$$\frac{\partial E_m}{\partial t} = -(i\omega + \chi)E_{mi} - i\sum_j g_j \alpha_j + F(t), \qquad (2)$$

где E_m – амплитуда; ω – частота моды; χ – постоянная затухания; g_j – постоянная взаимодействия между модой и атомом.

Также из (1) могут быть получены уравнения для атомных дипольных моментов и уравнение для инверсии населенности атомных уровней, описывающее обратное воздействие поля на атомы.

В силу широкого применения и развитой теории лазеры представляют собой удачный пример для исследования и демонстрации свойств НДС. В работе [2] изучено возникновение и распространение диссипативных солитонов в волоконных лазерах с синхронизацией мод, используемых для генерации сверхкоротких высокоэнергетичных импульсов. В таких лазерах наблюдается сильная нелинейная динамика на одном обходе при этом возникают новые структуры – диссипативные оптические солитоны. Для исследования динамики амплитуды и фазы излучения предложены инструменты теории открытых систем, в частности уравнение Гинзбурга – Ландау и отображение Пуанкаре. Исследования показали, что диссипативные солитоны являются аттракторами НДС, что обеспечивает их формирование из широкого класса начальных распределений оптического поля, включая полностью случайные, шумовые распределения. Этот процесс можно отождествить с эволюцией системы.

Большие ожидания от практического применения солитонов объясняются их уникальными свойствами, такими как дискретность спектра основных параметров, но развитие теории оптических солитонов требует решения ряда научных задач, в том числе построения адекватных моделей измерения и оценки их результатов.

Работа [9] также посвящена исследованию и моделированию нелинейных процессов в лазерах. Рассмотрено явление пространственно-временной динамики сверхмощных ультракоротких световых импульсов. Такое явление возникает вследствие баланса между дисперсией и нелинейности.

Анализ процессов в лазерах показывает, что фазовые переходы в лазере демонстрирует свойства, характерные для обычных фазовых переходов, в том числе критические флуктуации и нарушение симметрии. Состояние упорядоченности в лазере поддерживается за счет процессов самоорганизации, протекающих благодаря притоку дополнительной энергии извне (система накачки).

Физико-математические основы нелинейных измерений

Рассмотрим физические свойства, общие для различных НДС, и выберем математические инструменты анализа и представления результатов измерения ДП.

Состояние НДС в момент времени t характеризуется n-мерным вектором $X\left[X_1(t),...,X_n(t)\right]$, где $X_i(t)$ – i-я ДП. С течением времени значение $X_i(t)$ *меняется, но находится в интервале* $X_i^{\min} \le X_i \le X_i^{\max}$. Этот интервал обусловлен возможностями функционирования системы. Выход значения ДП за его пределы означает разрушение системы.

Поэтому при проведении измерений отдельной ДП должен формироваться достаточно длинный временной ряд, охватывающий все возможные значения ДП:

$$x_i^1(t_1),...,x_i^n(t_n)\,, \tag{3}$$

где $x_i^j(t_j)$ – результат измерения ДП $X_i(t)$ в момент времени t_i.

Минимальное количество измерительных экспериментов $n_{\min}$, необходимое для формирования аттрактора, оценивается по формуле [10]:

$$n_{\min} \geq 10^{2+0,4D}, \tag{4}$$

где D – фрактальная размерность аттрактора.

Заметим, что в этом случае фрактальную размерность можно оценить сверху, приняв D равной размерности вектора состояния НДС.

Результаты измерения ДП с учетом неопределенности измерения:

$$Y_i(t) = (y_i^{\min} - u_i^{\min}, y_i^{\max} + u_i^{\max}), \tag{5}$$

где $Y_i(t)$ – результат измерения $X_i(t)$; $y_i^{\min}, y_i^{\max}$ – оценки измерений минимального и максимального значений (3); $u_i^{\min}, u_i^{\max}$ – их неопределенности типа «А» [11].

Разброс значений в интервале (5) обусловлен как несовершенством измерительных процедур, так и динамикой самой ДП, при этом вклад динамики в неопределенность измерений является доминирующим. Динамика ДП носит сложный характер и в процессе эволюции системы она может быть регулярной (детерминированной), случайной или хаотичной [12].

Для классификации динамики применяется фрактальная шкала с реперными точками: $D=1$, $D=1{,}5$, $D=2$, разделяющими разные характеры динамики. При $D=1$ поведение системы строго детерминированное. При $D=1{,}5$ процесс является случайным. При $D=2$ система ведет себя регулярным образом, но разброс измеряемых значений очень велик, что не позволяет использовать методы обработки результатов измерений. В случае, если 1<*D*<1,5 или 1,5<*D*<2, исследуемый процесс является немарковским, хаотичным; при 1<*D*<1,5 процесс представляется персистентным и приближается к детерминированному, персистентность распространяется на бесконечно долгий срок; при 1,5<*D*<2 процесс представляется антиперсистентным и имеет случайный (шумовой) разброс, превышающий величину медленных изменений.

Для определения *D* используется статистический метод нормированного размаха (R/σ –анализ) [10]. Анализ временного ряда (3) методом Херста позволяет получить одноименный показатель *H*, который связан с *D* выражением

$$D = 2 - H\,. \tag{6}$$

Показатель Херста H определяется через величину R/σ, где R – размах между максимальным и минимальным значениями функции приращения $x(i,n)$, σ – дисперсия:

$$R(i) = \max_{1\leq i\leq n} x(i,n) - \min_{1\leq i\leq n} x(i,n),\; x(i,n) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_i)\,, \tag{7}$$

где $\overline{x}_i$ – среднее арифметическое значений (3).

Знание фрактальной размерности позволяет оценить характер поведения ДП, выбрать соответствующий математический аппарат обработки результатов измерения и величину внешнего воздействия для стабилизации значений ДП.

Сложной и актуальной задачей является прогноз динамики НДС. Он выполняется, с использованием модельных уравнений процесса (в случае лазеров – модифицированные уравнения (1), (2), дополненные начальными условиями). В некоторых случаях целью прогноза является не значение отдельной ДП в определенный момент времени, а сама динамика ДП, ее тренд. Характеристической величиной в этом случае служит время предсказания T_{for}

(горизонт прогноза). Оно зависит от степени детерминирования динамики (самое длительное для детерминированной системы и стремится к нулю для случайных и хаотических систем) и метрологических возможностей. Время предсказания часто считают по упрощенным формулам, опираясь на энтропию Колмогорова K и показатель Ляпунова λ [11]:

$$T_{for}(K) \sim 1/K, T_{for}(\lambda) \sim 1/\lambda_{\max}. \tag{8}$$

где $\lambda_{\max}$ – максимальный показатель Ляпунова.

Таким образом, к физическим свойствам, общим для различных НДС и важным для измерения значений характеристик лазеров и солитонов, можно отнести: интервальность значений ДП; различные режимы динамики; сильную зависимость от начальных условий; подверженность шумам. Применение описанных математических методов и инструментов позволяют не только получить результат измерения в отдельный момент времени, но и получить основополагающие научные данные в виде неизвестных ранее математических моделей и выполнить их интерпретацию. Полученные данные и модели важны для стабилизации характеристик лазеров и солитонов.

Выводы

Сформулированы физико-математические основы измерений в физических нелинейных динамических системах. В качестве примера нелинейных систем рассмотрен лазер. К физическим свойствам, общим для различных систем можно отнести: интервальность значений измеряемых величин; хаотичные режимы динамики; зависимость от начальных условий и шумов.

Для исследования и анализа результатов измерения предложены математические инструменты и методы теории динамического хаоса, открытых систем, фрактального анализа: интервалы значений величин.

Применение описанных методов и инструментов позволяют не только получить результат измерения в отдельный момент времени, но и получить основополагающие научные данные в виде неизвестных ранее математических моделей и выполнить их интерпретацию. Полученные данные и модели важны для создания лазеров с высокой стабилизацией характеристик и практического применения солитонов.

Список литературы:

1. Гинзбург В.Л. Какие проблемы физики и астрофизики представляются сейчас особенно важными и интересными? // УФН. 1999. Т. 169. №4. С. 419-442.

2. Турицын С.К., Розанов Н.Н., Яруткина И.А. Диссипативные солитоны в волоконных лазерах // УФН. 2016. Т. 186. №7. С. 713-742.

3. Gnatenko A.S., Machechin Y.P. Generation mode stability of a fiber ring laser // Telecommunications and Radio Engineering. 2015. V.74, №7, pp. 641-647.

4. Лячнев В.В. Метрологические основы теории измерительных процедур. Санкт-Петербург: Элмор, 2011. 411 с.

5. Хакен Г. Синергетика. Москва : Мир, 1980. 388 с.

6. Machekhin Yu. P. Fractal scale for time series of the results of measurements // Measurement Techniques. 2009. V. 52. №8. Pp. 835-838.

7. Machekhin Yu., Kurskoy Yu. Fractal-entropy analysis of measurement results in nonlinear dynamical systems // Measuring technique. 2014. V. 57. № 6. pp. 609-704.

8. Мачехин Ю. П., Курской Ю. С. Основы нелинейной метрологии. Издательство: LAP , 2014. 160 p.

9. Воронин А., Желтиков А. Нелинейная динамика сверхмощных ультракоротких лазерных импульсов: эксафлопные вычисления на лабораторном компьютере и субпериодные световые пули // УФН. 2016. Т. 186 №7. С. 957-966.

10. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Москва : Постмаркер, 2000. 352 с.

11. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, 2nd edn.BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP and OIML, 1995. 64 p.

12. Лоскутов А. Ю. Очарование хаоса // УФН. 2010. Т. 180. №12. С. 1304-1329.

Харьковский национальный
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 12.02.2018