

ВЕРИФИКАЦИЯ ШЕСТИУГОЛЬНОЙ КОММУНИКАЦИОННОЙ РЕШЕТКИ БЕСКОНЕЧНЫМИ СЕТЯМИ ПЕТРИ

Сети мобильной связи [1] являются одними из наиболее широко используемых видов услуг, которые предоставляют средства быстрой связи и доступа к информационным ресурсам, создают информационное и коммуникационное пространство современного общества. Поэтому безопасность и надежность мобильных систем [2] являются базовыми условиями бесперебойного режима работы большинства технологических, социальных и административных систем.

Аналитические методы моделирования и верификации [3] сотовых сетей имеют определенные ограничения, предусмотренные допущениями и упрощениями [2], принятыми в процессе получения основных уравнений. Бесконечные сети Петри [4] обладают определенными преимуществами, такими как спецификация особенностей сетей и получение результатов, не зависящих от размера сети, а только от ее топологии и технологии [5]. Основные методы анализа свойств сетей Петри изучены в [6]. Применение сетей Петри позволяет осуществлять формальную верификацию протоколов в соответствии со свойствами идеального протокола [7]. Предложенными методами исследовались квадратные [4], треугольные, древовидные коммуникационные решетки, куб и гиперкуб [5, 8].

Настоящая работа представляет собой дальнейшее развитие метода построения моделей коммуникационных решеток в форме бесконечных сетей Петри на примере шестиугольной решетки произвольного размера и вычисления линейных инвариантов бесконечных сетей Петри с регулярной структурой для доказательства корректности протоколов.

Постановка задачи

Для представления модели объекта в форме сети Петри и последующего нахождения основных свойств используется прямое [4] или двойственное описание [5]. Прямое описание является широко применяемым в теории сетей Петри, каждая строка которого содержит имя описываемого перехода, его входные и выходные позиции с коэффициентами, равными весу входных и выходных дуг соответственно. На основании прямого описания модели и правила [6] строится система линейных уравнений для нахождения инвариантов позиций и определения свойств ограниченности и консервативности.

Каждая строка двойственного описания содержит имя описываемой позиции, ее входные и выходные переходы с коэффициентами, равными весу входных и выходных дуг. На основании двойственного описания модели строится система линейных уравнений для нахождения инвариантов переходов и определения свойства стационарной повторяемости.

Для построения параметрического описания модели шестиугольной решетки со стороны k были введены [9]:

- координатная сетка из $q(k)$ горизонтальных и косых опорных линий,
- диапазоны изменения индексов узлов (1),
- правила композиции и специальные соглашения по именованию позиций портов,
- функции, возвращающие значение индексов для соседнего устройства, и номер соседнего порта (2).

Формальное описание модели шестиугольных решеток

Для описания модели шестиугольных решеток в данной работе используется прямое параметрическое представление, опишем дополнительные индексы и функции, которые используются в формальном представлении. В шестиугольной решетке со стороны k диапазоны изменения индексов i горизонтальных и j косых опорных линий следующие:

$$i = \overline{1, q(k)}, j = \overline{1, qj(k)}, \text{ где } q(k) = 2 \cdot k - 1, qj(i) = \begin{cases} k-1+i, 1 \leq i \leq k \\ 3 \cdot k - 1 - i, k < i \leq 2 \cdot k - 1 \end{cases} \quad (1)$$

Описание специальных соглашений по именованию позиций портов для композиции шестиугольной решетки представлено в [9]. В композиции решетки для внутренних узлов используются имена портов только с номерами $p = \overline{1, 3}$. Имена портов с номерами $p = \overline{4, 6}$ внутреннего узла заменяются на имена портов с номером $p-3$ соседнего устройства с индексами i и j , вычисленными с помощью функций $xi(p, i)$ и $xj(p, j)$. Схема композиции решетки изображена на рис. 1.

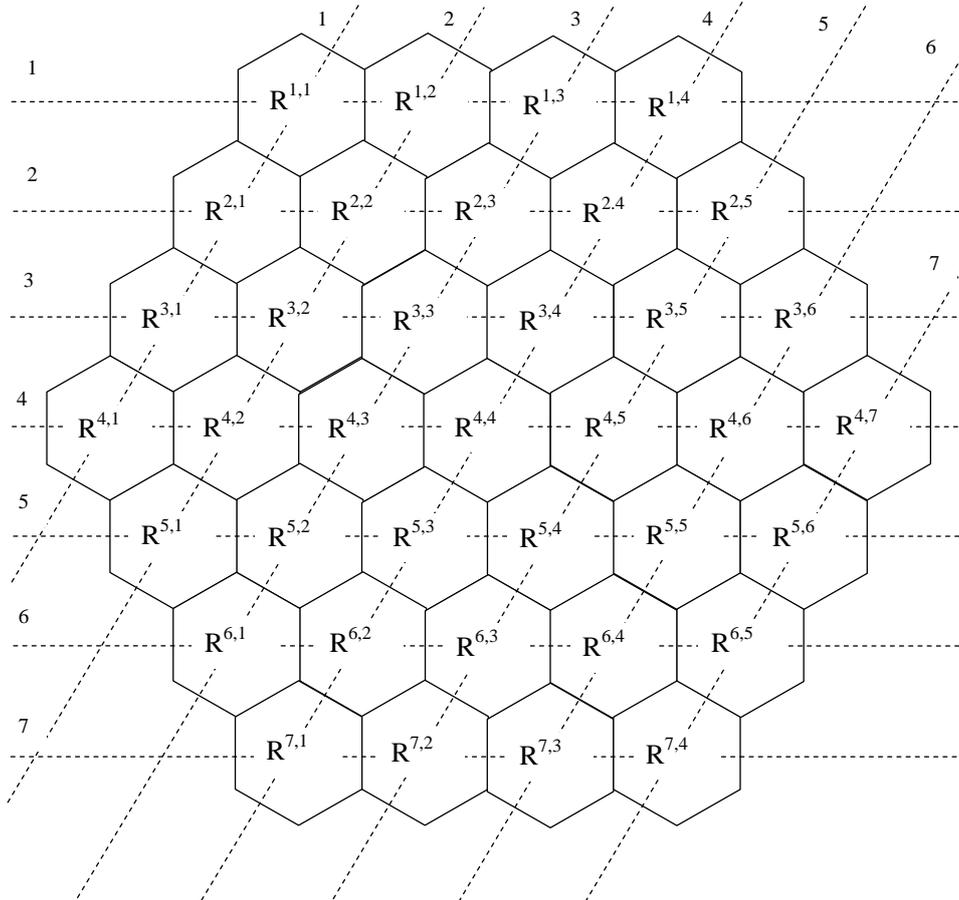


Рис. 1. Схема композиции решетки

При композиции прямоугольных решеток [4] произвольного размера для упрощения описания допускалось введение индексов узлов, которые не присутствуют в модели. В общем случае это касается краевых узлов, например узел с индексом $(1, 1)$ слева не имеет соседнего узла, но порт с индексом $(1, 0)$ в модели присутствует. Такие соглашения существенно упрощают правила композиции решетки, нахождение индексов соседних устройств, назначение номера порта. Однако в некоторых случаях необходимо использовать нумерацию только реальных объектов.

В представленной работе для краевых узлов введены дополнительные исследования значений индексов для корректного определения индексов соседних узлов и номера порта. Функции, возвращающие значение индекса i для соседнего устройства $xi(p, i)$ и номер соседнего порта $xp(p)$, представленные в (2), верны для внутренних узлов:

$$xi(p, i) = \begin{cases} i-1, p=1, p=6, \\ i, p=2, p=5, \\ i+1, p=3, p=4. \end{cases} \quad xp(p) = \begin{cases} p+3, p \leq 3, \\ p-3, p > 3. \end{cases} \quad (2)$$

Функция $x_j(p, j)$, возвращающая значение индекса j для соседнего устройства, зависит от значения номера горизонтальной линии. В (3) представлено расширенное описание функции $x_j(p, j)$, в котором рассматриваются все возможные значения индекса i , сначала проверяются условия для краевых строк, затем для внутренних:

$$\begin{aligned}
 \text{если } i = 1, \text{ то } x_j(p, j) &= \begin{cases} j-1, p = 5 \wedge j \neq 1, \\ j, p = 1, p = 4, p = 6, p = 5 \wedge j = 1, \\ j+1, p = 2, p = 3; \end{cases} \\
 \text{если } i = q(k), \text{ то } x_j(p, j) &= \begin{cases} j-1, p = 5 \wedge j \neq 1, \\ j, p = 3, p = 4, p = 6, p = 5 \wedge j = 1, \\ j+1, p = 1, p = 2; \end{cases} \\
 \text{если } i < k, \text{ то } x_j(p, j) &= \begin{cases} j-1, (p = 5, p = 6) \wedge j \neq 1, \\ j, p = 1, p = 4, (p = 5, p = 6) \wedge j = 1, \\ j+1, p = 2, p = 3; \end{cases} \\
 \text{если } i = k, \text{ то } x_j(p, j) &= \begin{cases} j-1, (p = 4, p = 5, p = 6) \wedge j \neq 1, \\ j, p = 1, p = 3, (p = 4, p = 5, p = 6) \wedge j = 1, \\ j+1, p = 2; \end{cases} \\
 \text{если } i > k, \text{ то } x_j(p, j) &= \begin{cases} j-1, (p = 4, p = 5) \wedge j \neq 1, \\ j, p = 3, p = 6, (p = 4, p = 5) \wedge j = 1 \\ j+1, p = 1, p = 2. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3}$$

Для построения композиции модели шестиугольной решетки произвольного размера используется модель коммуникационного узла, изображенная на рис. 2. Описание модели узла и параметрическое представление изучено в [5], для исследуемой модели значение параметра $np = 6$. Модель узла представляет собой устройство коммутации пакетов с обязательной буферизацией, работающее в полнодуплексном режиме, состоит из внутреннего буфера и портов, расположенных на гранях шестиугольника. Позиции $pb_v^{i,j}$ и $pbl^{i,j}$ описывают внутренний буфер узла, состоящий из буферов для каждого порта и общего ограничителя размера буфера. Контактные позиции $pi_u^{i,j}$ ($pil_u^{i,j}$) и $po_u^{i,j}$ ($pol_u^{i,j}$) соответствуют входным и выходным буферам портов узла и ограничителям их размеров. Переходы $ti_{u,v}^{i,j}$ описывают входные тракты, переходы $ti_{u,v}^{i,j}$ определяют выходные тракты портов, переходы $t_u^{i,j}$ отображают простейшие терминальные устройства.

Отметим, что для нахождения инвариантов позиций или p -инвариантов [6] достаточно представления модели открытой решетки. Открытая решетка – это решетка, состоящая только из моделей коммуникационных узлов, и не содержащая терминальных устройств на границах. Прямое параметрическое представление открытой шестиугольной решетки размера k , дополненное определением значения индекса p , где p это номер соседнего порта, имеет вид

$$\left(\left(\left(\begin{array}{l} \left(to_u^{i,j} : pol_u^{i,j}, pb_u^{i,j} \rightarrow po_u^{i,j}, pbl^{i,j} \right) \\ \left(ti_{u,v}^{i,j} : pi_u^{i,j}, pbl^{i,j} \rightarrow pb_v^{i,j}, pil_u^{i,j} \right) \end{array} \right), u = \overline{1,3}, v = \overline{1,6}, v \neq u \right. \right. \\
 \left. \left(\begin{array}{l} \left(to_u^{i,j} : pil_{xp(p)}^{xi(p,i),xj(p,j)}, pb_u^{i,j} \rightarrow pi_{xp(p)}^{xi(p,i),xj(p,j)}, pbl^{i,j} \right) \\ \left(ti_{u,v}^{i,j} : po_{xp(p)}^{xi(p,i),xj(p,j)}, pbl^{i,j} \rightarrow pb_v^{i,j}, pol_{xp(p)}^{xi(p,i),xj(p,j)} \right) \end{array} \right), u = \overline{4,6}, v = \overline{1,6}, v \neq u, p = u \right) \right. \\
 \left. i = \overline{1, q(k)}, j = \overline{1, qj(i)} \right) \tag{4}$$

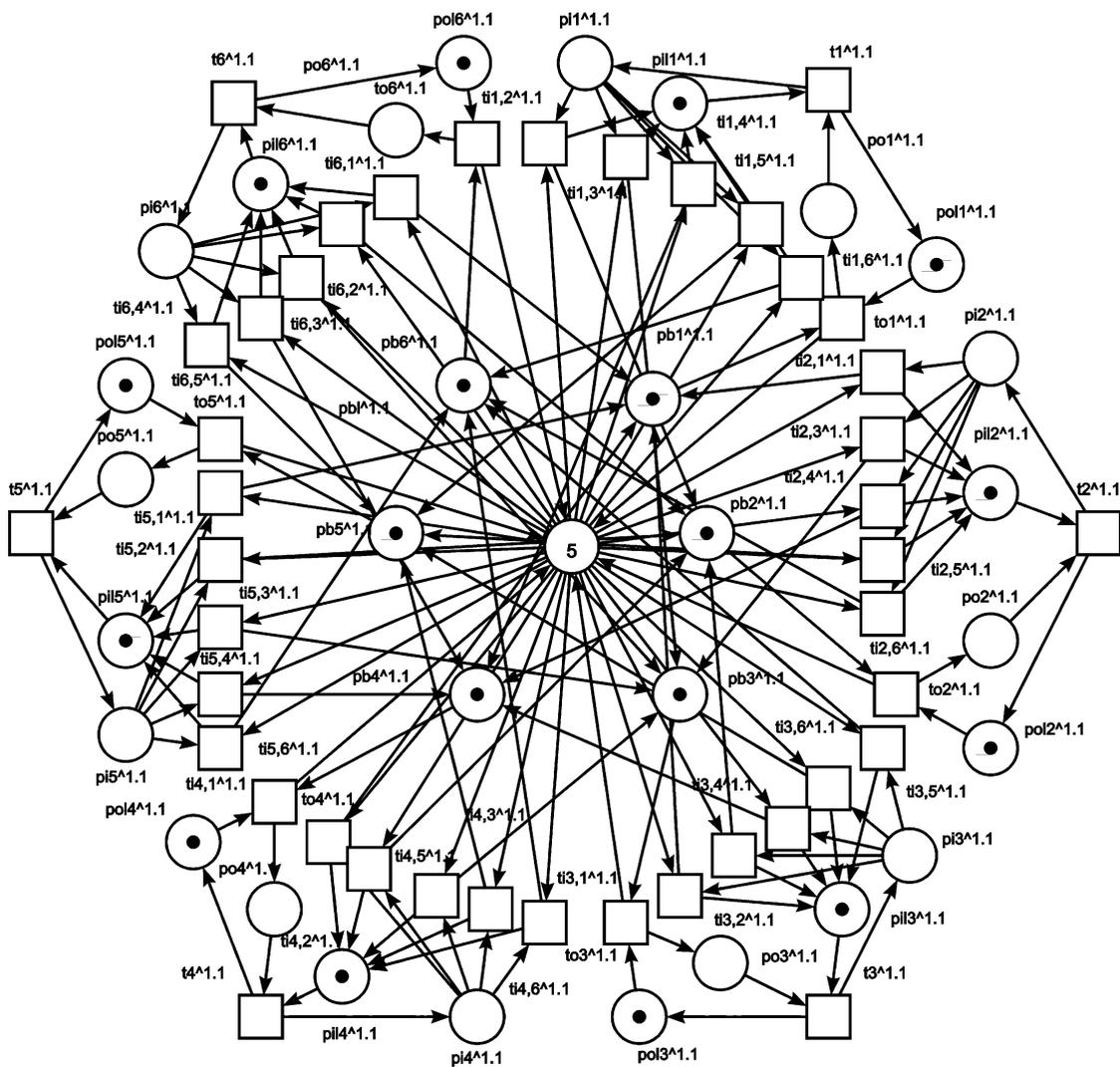


Рис. 2. Модель коммуникационного узла

Для нахождения инвариантов переходов или t -инвариантов [6] исследуется модель закрытой решетки. К границам решетки добавляются терминальные устройства, типы терминальных устройств и различные граничные условия изучены в [8]. В (5) дано прямое параметрическое описание моделей простейших терминальных устройств, присоединенных к границам решетки. Модель простейшего терминального устройства использовалась при построении модели шестиугольной решетки размера $k = 1$ или, иначе, модели коммуникационного узла, изображенного на рис. 2:

$$\left(\begin{array}{l}
 (t_u^{i,j} : po_u^{i,j}, pil_u^{i,j} \rightarrow pol_u^{i,j}, pi_u^{i,j}), u = 1,6; i = 1, j = \overline{1, qj(i)} \\
 (t_u^{i,j} : po_u^{i,j}, pil_u^{i,j} \rightarrow pol_u^{i,j}, pi_u^{i,j}), u = 3,4; i = 2k - 1, j = \overline{1, qj(i)} \\
 (t_u^{i,j} : po_u^{i,j}, pil_u^{i,j} \rightarrow pol_u^{i,j}, pi_u^{i,j}), u = 5,6; i = \overline{1, k}, j = 1 \\
 (t_u^{i,j} : po_u^{i,j}, pil_u^{i,j} \rightarrow pol_u^{i,j}, pi_u^{i,j}), u = 4,5; i = \overline{k, 2k - 1}, j = 1 \\
 (t_u^{i,j} : po_u^{i,j}, pil_u^{i,j} \rightarrow pol_u^{i,j}, pi_u^{i,j}), u = 1,2; i = \overline{1, k}, j = qj(i) \\
 (t_u^{i,j} : po_u^{i,j}, pil_u^{i,j} \rightarrow pol_u^{i,j}, pi_u^{i,j}), u = 2,3; i = \overline{k, 2k - 1}, j = qj(i)
 \end{array} \right) \quad (5)$$

Простейшие терминальные устройства (5) отображают пакет из выходного порта во входной порт узла без дополнительной обработки. При объединении описаний (4) и (5) получается прямое параметрическое представление закрытой шестиугольной решетки.

Инварианты позиций сети Петри

Для вычисления инвариантов позиций составим систему линейных уравнений (6), где каждому уравнению соответствует переход из параметрического представления (4), уравнение содержит равные суммы для его входящих и исходящих дуг. Система (6) для вычисления p -инвариантов показана в параметрическом виде.

$$\left(\left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} xpol_u^{i,j} + xpb_u^{i,j} - xpo_u^{i,j} - xpb_l^{i,j} = 0, \\ xpi_u^{i,j} + xpb_l^{i,j} - xpb_v^{i,j} - xpil_u^{i,j} = 0 \end{array} \right), u = \overline{1,3}, v = \overline{1,6}, v \neq u \\ \left(\begin{array}{l} xpi_{xp(p)}^{xi(p,i),xj(p,j)} + xpb_u^{i,j} - xpi_{xp(p)}^{xi(p,i),xj(p,j)} - xpb_l^{i,j} = 0, \\ xpo_{xp(p)}^{xi(p,i),xj(p,j)} + xpb_l^{i,j} - xpb_v^{i,j} - xpol_{xp(p)}^{xi(p,i),xj(p,j)} = 0 \end{array} \right), u = \overline{4,6}, v = \overline{1,6}, v \neq u, p = u \end{array} \right), \right. \quad (6)$$

$$\left. i = \overline{1, q(k)}, j = \overline{1, qj(i)} \right)$$

Для открытой шестиугольной решетки размера k решение (7) системы (6) получено в параметрической форме и содержит 15 строк:

$$\left(\begin{array}{l} (pi_u^{i,j}, pil_u^{i,j}), u = \overline{1,3}, i = \overline{1, q(k)}, j = \overline{1, qj(i)}; \\ (po_u^{i,j}, pol_u^{i,j}), u = \overline{1,3}, i = \overline{1, q(k)}, j = \overline{1, qj(i)}; \\ (pi_u^{i,j}, pil_u^{i,j}), u = \overline{5,6}, i = \overline{1, k}, j = 1; \\ (po_u^{i,j}, pol_u^{i,j}), u = \overline{5,6}, i = \overline{1, k}, j = 1; \\ (pi_u^{i,j}, pil_u^{i,j}), u = 6, i = 1, j = \overline{2, qj(i)}; \\ (po_u^{i,j}, pol_u^{i,j}), u = 6, i = 1, j = \overline{2, qj(i)}; \\ (pi_u^{i,j}, pil_u^{i,j}), u = 4, i = k, j = 1; \\ (po_u^{i,j}, pol_u^{i,j}), u = 4, i = k, j = 1; \\ (pi_u^{i,j}, pil_u^{i,j}), u = \overline{4,5}, i = \overline{k+1, q(k)}, j = 1; \\ (po_u^{i,j}, pol_u^{i,j}), u = \overline{4,5}, i = \overline{k+1, q(k)}, j = 1; \\ (pi_u^{i,j}, pil_u^{i,j}), u = 4, i = q(k), j = \overline{2, qj(i)}; \\ (po_u^{i,j}, pol_u^{i,j}), u = 4, i = q(k), j = \overline{2, qj(i)}; \\ (pb_1^{i,j}, pb_2^{i,j}, pb_3^{i,j}, pb_4^{i,j}, pb_5^{i,j}, pb_6^{i,j}, pbl^{i,j}), i = \overline{1, q(k)}, j = \overline{1, qj(i)}; \\ (((pb_1^{i,j}, pb_2^{i,j}, pb_3^{i,j}, pb_4^{i,j}, pb_5^{i,j}, pb_6^{i,j}), i = \overline{1, q(k)}, j = \overline{1, qj(i)}), ((pi_u^{i,j}, po_u^{i,j}), \\ u = \overline{1,3}, i = \overline{1, q(k)}, j = \overline{1, qj(i)}), ((pi_u^{i,j}, po_u^{i,j}), u = \overline{5,6}, i = \overline{1, k}, j = 1), ((pi_u^{i,j}, po_u^{i,j}), \\ u = 6, i = 1, j = \overline{2, qj(i)}), ((pi_u^{i,j}, po_u^{i,j}), u = 4, i = k, j = 1), ((pi_u^{i,j}, po_u^{i,j}), u = \overline{4,5}, \\ i = \overline{k+1, q(k)}, j = 1), (pi_u^{i,j}, po_u^{i,j}), u = 4, i = q(k), j = \overline{2, qj(i)})); \\ (((pbl^{i,j}), i = \overline{1, q(k)}, j = \overline{1, qj(i)}), ((pil_u^{i,j}, pol_u^{i,j}), u = \overline{1,3}, i = \overline{1, q(k)}, j = \overline{1, qj(i)}), \\ ((pil_u^{i,j}, pol_u^{i,j}), u = \overline{5,6}, i = \overline{1, k}, j = 1), ((pil_u^{i,j}, pol_u^{i,j}), u = 6, i = 1, j = \overline{2, qj(i)}), \\ ((pil_u^{i,j}, pol_u^{i,j}), u = 4, i = k, j = 1), ((pil_u^{i,j}, pol_u^{i,j}), u = \overline{4,5}, i = \overline{k+1, q(k)}, j = 1), \\ (pil_u^{i,j}, pol_u^{i,j}), u = 4, i = q(k), j = \overline{2, qj(i)})). \end{array} \right) \quad (7)$$

Каждая строка (7) является решением системы (6) и содержит только ненулевые компоненты. Если инвариант позиции (множитель) не равен единице, используется обозначение $x:p$, где x – значение инварианта позиции p . В полученном решении указаны только имена

соответствующих позиций, ненулевой множитель опущен, так как равен единице. Следующим шагом исследования является доказательство того, что представленное в параметрической форме решение (7) является решением системы (6).

Лемма 1. Каждая строка (7) является решением системы (6).

Доказательство. Подставим каждую параметрическую строку (7) в каждое параметрическое уравнение системы (6). При подстановке выбираются различные значения индексов, в результате получаем корректные равенства. Например, подставим вторую строку (7) $(po_u^{i,j}, pol_u^{i,j}), u = \overline{1,3}, i = \overline{1, q(k)}, j = \overline{1, qj(i)}$ во все уравнения системы (6), сначала рассмотрим первое уравнение:

$$\begin{aligned} xpol_u^{i,j} + xpb_u^{i,j} - xpo_u^{i,j} - xpb_l^{i,j} &= 0, \\ u = \overline{1,3}, v = \overline{1,6}, v \neq u, i = \overline{1, q(k)}, j = \overline{1, qj(i)}. \end{aligned}$$

Переменные первого уравнения $pb_u^{i,j}$ и $pbl^{i,j}$ не указаны во второй строке решения, следовательно, эти компоненты нулевые. Поскольку индекс v не указан в решении, то его значение не влияет на доказательство. Тогда, для всех комбинаций индексов u, i и j получаем:

$$1+0-1-0=0, \text{ следует } 0=0.$$

Рассмотрим второе уравнение:

$$\begin{aligned} xpi_u^{i,j} + xpb_l^{i,j} - xpb_v^{i,j} - xpi_l^{i,j} &= 0, \\ u = \overline{1,3}, v = \overline{1,6}, v \neq u, i = \overline{1, q(k)}, j = \overline{1, qj(i)}. \end{aligned}$$

Переменные второго уравнения $pi_u^{i,j}, pbl^{i,j}, pb_v^{i,j}$ и $pil_u^{i,j}$ не указаны во второй строке решения, следовательно, эти компоненты нулевые. Тогда, для всех комбинаций индексов u, v, i и j получаем:

$$0+0-0-0=0, \text{ следует } 0=0.$$

Рассмотрим третье уравнение системы (6):

$$\begin{aligned} xpi_{xp(p)}^{xi(p,i),xj(p,j)} + xpb_u^{i,j} - xpi_{xp(p)}^{xi(p,i),xj(p,j)} - xpb_l^{i,j} &= 0, \\ u = \overline{4,6}, v = \overline{1,6}, v \neq u, i = \overline{1, q(k)}, j = \overline{1, qj(i)}. \end{aligned}$$

Значение индексов, вычисленных с помощью функций $xp(p), xi(p,i)$ и $xj(p,j)$, не влияют на доказательство, так как все переменные третьего уравнения, как и в случае второго уравнения, не указаны в строке решения, поэтому эти компоненты нулевые. Для всех комбинаций индексов получаем:

$$0+0-0-0=0, \text{ следует } 0=0.$$

Рассмотрим последнее, четвертое, уравнение:

$$\begin{aligned} xpo_{xp(p)}^{xi(p,i),xj(p,j)} + xpb_l^{i,j} - xpb_v^{i,j} - xpo_{xp(p)}^{xi(p,i),xj(p,j)} &= 0 \\ u = \overline{4,6}, v = \overline{1,6}, v \neq u, p = u, i = \overline{1, q(k)}, j = \overline{1, qj(i)}. \end{aligned}$$

Номера портов переменных $po_{xp(p)}^{xi(p,i),xj(p,j)}$ и $pol_{xp(p)}^{xi(p,i),xj(p,j)}$ рассчитываются с помощью функции $xp(p)$ и принимают значения, согласно (2) в диапазоне от 1 до 3. Во второй строке решения (7) номера портов в этом же диапазоне $u = \overline{1,3}$. Множество значения индексов i и j , вычисленных с помощью функций $xi(p,i)$ и $xj(p,j)$, является подмножеством значений этих индексов для второй строки решения (7). Переменные последнего уравнения $pbl^{i,j}$ и $pb_v^{i,j}$ не указаны во второй строке решения, следовательно, эти компоненты нулевые, в результате получаем:

$$1+0-0-1=0, \text{ следует } 0=0.$$

Остальные 14 решений из (7) для системы (6), проверяются аналогичным способом. Количество комбинаций равно $15 \cdot 4 = 60$.

Для дальнейших теоретических исследований определим характеристики размера сети: количество вершин каждого вида – позиций и переходов, и количество дуг в шестиугольной решетке размера k . Количество позиций:

$$N_p = 19N_c + 24k - 12, \tag{8}$$

где N_c количество узлов в решетке,

$$N_c = 3k^2 - 3k + 1, \text{ тогда } N_p = 57k^2 - 33k + 7.$$

Количество переходов:

$$N_t = 36N_c + 12k - 6.$$

В треугольной решетке размера k количество дуг

$$N_{arc} = 144N_c + 48k - 24.$$

Теорема 1. Модель шестиугольной решетки размера k , представленная в форме сети Петри, является p -инвариантной сетью Петри для произвольного натурального числа k .

Доказательство. Рассмотрим сумму первых тринадцати строк решения (7). В соответствии с Леммой 1 эти строки являются решениями системы (6). В (7) первые двенадцать решений имеют попарно одинаковые индексы, для наглядности расчетов объединим строки 1-12 (первую строку со второй, третью с четвертой и т.д.), результат представлен в (9).

$$\left(\begin{array}{l} (((p_i^{i,j}, pil_u^{i,j}), (po_u^{i,j}, pol_u^{i,j})), u = \overline{1,3}, i = \overline{1, q(k)}, j = \overline{1, qj(i)}; \\ ((p_i^{i,j}, pil_u^{i,j}), (po_u^{i,j}, pol_u^{i,j})), u = \overline{5,6}, i = \overline{1, k}, j = 1; \\ ((p_i^{i,j}, pil_u^{i,j}), (po_u^{i,j}, pol_u^{i,j})), u = 6, i = 1, j = \overline{2, qj(i)}; \\ ((p_i^{i,j}, pil_u^{i,j}), (po_u^{i,j}, pol_u^{i,j})), u = 4, i = k, j = 1; \\ ((p_i^{i,j}, pil_u^{i,j}), (po_u^{i,j}, pol_u^{i,j})), u = \overline{4,5}, i = \overline{k+1, q(k)}, j = 1; \\ ((p_i^{i,j}, pil_u^{i,j}), (po_u^{i,j}, pol_u^{i,j})), u = 4, i = q(k), j = \overline{2, qj(i)}; \\ (pb_1^{i,j}, pb_2^{i,j}, pb_3^{i,j}, pb_4^{i,j}, pb_5^{i,j}, pb_6^{i,j}, pbl^{i,j}), i = \overline{1, q(k)}, j = \overline{1, qj(i)}. \end{array} \right) \tag{9}$$

В табл. 1 показано количество позиций в каждой строке инварианта (9). Общая сумма количества позиций, перечисленных в инварианте (9), $N = 57k^2 - 33k + 7$, и равна N_p . Тогда, так как инварианты всех позиций являются натуральными числами, исследуемая сеть является p -инвариантной сетью Петри [6] для произвольного натурального числа k и обладает свойствами ограниченности и консервативности. Поскольку множитель каждой позиции (инвариант) равен единице, то сеть обладает свойством безопасности.

Таблица 1

Количество позиций в инварианте	Номер строки инварианта						
	1	2	3	4	5	6	7
	$36k^2 - 36k + 12$	$8k$	$4(k-1)$	4	$8(k-1)$	$4(k-1)$	$21k^2 - 21k + 7$

Доказательство того, что сумма двух последних строк решения (7) является инвариантом сети Петри, проводится аналогично. В табл. 2 показано количество позиций в четырнадцатой и пятнадцатой строках (7).

Количество позиций в инварианте	Номер строки инварианта	
	14	15
	$36k^2 - 24k + 6$	$21k^2 - 9k + 1$

Общая сумма количества позиций, перечисленных в табл.2, $N = 57k^2 - 33k + 7$ и равна N_p . Вычисления инвариантов позиций и переходов необходимы для проверки корректности телекоммуникационных протоколов, поскольку идеальная модель протокола, представленная в форме сети Петри, должна быть p - и t -инвариантной [7].

Построено формальное прямое параметрическое описание модели открытой и закрытой шестиугольной решетки со стороной k по указанным правилам композиции решетки. Для корректной идентификации элементов модели краевых узлов введены расширенные описания функций определения индексов соседних узлов и номера порта.

На основании прямого описания модели построена система линейных уравнений для нахождения инвариантов позиций. Применена методика вычисления линейных инвариантов бесконечных сетей Петри с регулярной структурой для открытой шестиугольной решетки размера k , получено решение системы линейных уравнений в параметрической форме. Доказано, что модель шестиугольной решетки размера k , представленная в форме бесконечной сети Петри, является p -инвариантной сетью Петри для произвольного натурального числа k и, как следствие, обладает свойствами ограниченности и консервативности. Таким образом, коммуникационные решетки, представляющие собой реализацию изученной модели, могут быть построены с использованием накопителей конечной ёмкости без переполнения.

Список литературы:

1. Телекоммуникационные системы и сети : учеб. пособие : в 3 т. / Г. П. Катунин, В. Н. Попантонопуло, В. П. Шувалов, Г. В. Мамчев. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Горячая линия – Телеком, 2004 ; 2005.
2. Sayandev Mukherjee. Analytical Modeling of Heterogeneous Cellular Networks Geometry, Coverage, and Capacity. – Cambridge University Press, 2014. – 180 p.
3. Kolchin A.V., Letichevsky A.A., Potienko S.V., Peschanenko V.S.. Overview of modern systems and verification methods of formal models // Problems of Programming. 2012. – No. 4. – P. 75-88.
4. Shmeleva T.R., Zaitsev D.A., Zaitsev I.D. Analysis of Square Communication Grids via Infinite Petri Nets // Transactions of Odessa National Academy of Telecommunication. – 2009. – no. 1. – P. 27–35.
5. Zaitsev D.A., Zaitsev I.D., Shmeleva T.R. Infinite Petri Nets: Part 1, Modeling Square Grid Structures // Complex Systems. – 2017. – 26(2). – P. 157-195.
6. Murata T. Petri Nets: Properties, Analysis and Applications // Proceedings of the IEEE. – 1989. – 77(4). – p. 541–580.
7. Berthelot G., Terrat R. Petri Nets Theory for the Correctness of Protocols // IEEE Trans. on Communications, no. 12, 1982, vol. 30, p. 2497-2505.
8. Zaitsev D.A. Verification of Computing Grids with Special Edge Conditions by Infinite Petri Nets // Automatic Control and Computer Sciences. – 2013. – Vol. 47, N 7. – P. 403-412.
9. Шмельёва Т.Р. Параметрическая спецификация открытой шестиугольной решетки // 71 НТ конференция ОНАС, декабрь 6-8, 2016. – Одесса, 2016. – С. 65-68.