УДК 621.396.551.553

В.Н. ТКАЧЕНКО, д-р техн. наук, В.В. КОРОТКОВ, канд. техн. наук, Р.Л. ПАНТЕЕВ

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА НЬЮТОНА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К РЕШЕНИЮ КООРДИНАТНО-ТРАССОВЫХ ЗАДАЧ ПАССИВНЫМИ АВТОМАТИЧЕСКИМИ КОМПЛЕКСАМИ СОПРОВОЖДЕНИЯ ВОЗДУШНЫХ ЦЕЛЕЙ

В настоящее время широкое распространение получили беспоисковые по пространству пассивные комплексы автоматического обнаружения и построения маршрутов перемещения воздушных целей по излучениям их бортовых радиоэлектронных средств на базе разностно-дальномерного метода измерения координат.

Принцип действия таких систем основан на измерении разницы моментов прихода сигналов на станции, входящие в состав комплекса. Как правило, в состав комплекса входит четыре станции L_1, L_2, L_3, и C (рис. 1). Это позволяет обеспечить однозначное решение задачи по измерению трех координат воздушных целей в круговом пространственном секторе.

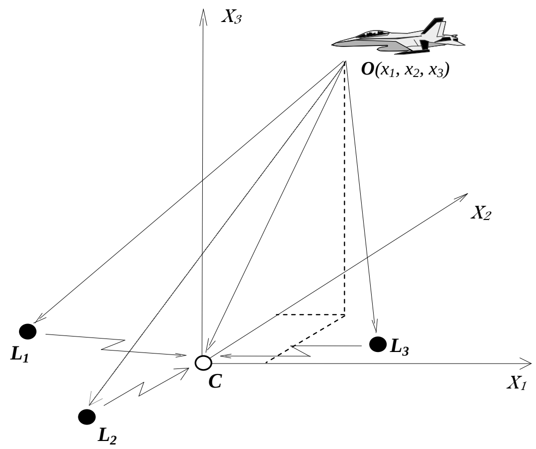

Рис.1

Координаты целей в текущий момент времени описываются системой трех уравнений:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{c}\cdot\left(\overline{OL_1} + C\overline{L_1} - \overline{OC}\right) \\ \tau_2 &= \frac{1}{c}\cdot\left(\overline{OL_2} + C\overline{L_2} - \overline{OC}\right) \\ \tau_3 &= \frac{1}{c}\cdot\left(\overline{OL_3} + C\overline{L_3} - \overline{OC}\right) \end{aligned} \qquad (1)$$

где $\tau_{1,2,3}$ _ задержки времени прихода сигнала от цели на центральную станцию С через боковые станции L_1, L_2, L_3; OL_i _ расстояния между целью и боковыми станциями; CL_i – расстояния между боковыми станциями и центральной; OC - расстояние между целью и центральной станцией.

Выразив соотношения (1) в системе координат положения станций и целей, получим систему нелинейных уравнений, в которой известны все величины кроме координат положения целей $x = x_1, x_2, x_3$

$$F_1(x)=\frac{1}{c}\cdot\left(\sqrt{(x_1-x_1^1)^2+(x_2-x_2^1)^2+\left(x_3-x_3^1\right)^2}+D_1-\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2}\right)-\tau_1=0$$
$$F_2(x)=\frac{1}{c}\cdot\left(\sqrt{(x_1-x_1^2)^2+(x_2-x_2^2)^2+\left(x_3-x_3^2\right)^2}+D_2-\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2}\right)-\tau_2=0 \qquad (2)$$
$$F_3(x)=\frac{1}{c}\cdot\left(\sqrt{(x_1-x_1^3)^2+(x_2-x_2^3)^2+\left(x_3-x_3^3\right)^2}+D_3-\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2}\right)-\tau_3=0$$

где $D_i=\overline{L_iC},\ \ i=1,2,3.$

Вектор $x^i=x_1^i,x_2^i,x_3^i,\ \ i=1,2,3$ определяет положение i-й станции в трехмерном пространстве R^3.

При создании математического и программного обеспечения для комплексов пассивной локации остро стоит проблема сокращения объема вычислительных операций.

В общем случае методов решения систем нелинейных уравнений $F(x)=0$, гарантирующих получение приемлемого результата, не существует. При условии выполнения определенных требований к свойствам нелинейных уравнений эффективным методом решения является итеративный метод Ньютона.

Для реализации метода Ньютона необходимо получить аналитические выражения для расчета матрицы частных производных.

$$\left\{\frac{\partial F_j(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_i}\quad i{=}1..3,\ j{=}1..3\right\}, \qquad (3)$$

где

$$\frac{\partial F_j(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_i}=\frac{x_i-x_{ij}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{3}(x_i-x_{ij})^2}}-\frac{x_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{3}x_i^2}}\quad i=1..3,\ j=1..3 \qquad (4)$$

В рассматриваемой области $\Omega\in R^3$ трехмерного пространства R^3 вектор-функция $F(x)=F_1(x),F_2(x),F_3(x),$ имеет все частные производные 1-го порядка. Вычислительную процедуру метода Ньютона можно легко получить из разложения в ряд Тейлора в точке x^* левых частей системы:

$$F(x^*)=F(x_k)+F'(x_k)(x^*-x_k)+R(x^*-x_k)\,, \qquad (5)$$

Предполагая, что x^* – есть решение системы, правую часть (3) приравняем нулю, и, пренебрегая остаточным членом $R(x*-x_k)$, получим схему Ньютона:

$$F(x_k)+F'(x_k)(x^*-x_k)=0\,. \qquad (6)$$

Разрешая уравнение (6) относительно нового приближения x_{k+1}, получим классическое представление метода:

$$x_{k+1}=x_k-F'(x_k)^{-1}F(x_k). \qquad (7)$$

Итерации возможны, если матрица частных производных $F'(x_k)$ – невырожденная. Эффективность метода Ньютона состоит в том, что имеет место оценка [2]:

$$\left\|x_{k+1}-x^*\right\|\le c\left\|x_{k+1}-x^*\right\|^2 \qquad (8)$$

показывающая, что близость к точному решению на $(k+1)$-й итерации пропорциональна квадрату ошибки k-й итерации, т.е. итерационный процесс (5) имеет квадратичную скорость сходимости.

Включая в ряд Тейлора члены второго порядка, можно получить вычислительную схему, обладающую кубической сходимостью:

$$x_{k+1} = x_k - \left[I - \frac{1}{2} F'(x_k)^{-1} F''(x_k) F'(x_k) F(x_k) \right]^{-1} F(x_k)^{-1} F(x_k), \qquad (9)$$

Для реализации этой схемы потребуется найти n^2 частных производных первого порядка и n^3 частных производных второго порядка, а также выполнить два обращения матриц. При таком объеме вычислительных операций даже увеличение скорости сходимости не позволяет этой схеме конкурировать с итерациями первого и второго порядка.

Менее затратной схемой третьего порядка является схема:

$$x_{k+1} = x_k - F'(x_k)^{-1} \left[F(x_k) + F(x_k - F'(x_k)^{-1} F(x_k)) \right], \qquad (10)$$

которая фактически содержит два шага с одной и той же обратной матрицей.

Одной из простейших модификаций метода Ньютона является итерация [2, с. 304]

$$x_{k+1} = x_k - \omega \left[F'(x_k) + \lambda I \right]^{-1} F(x_k)\ , \qquad k = 0,1,\ldots,n \qquad (11)$$

где ω, λ – фиксированные постоянные.

В случае если $\omega = 1$ и $\lambda = 0$, то (11) сводится к классическому методу Ньютона.

Итерация по формуле (9) не обладает сверхлинейной скоростью сходимости метода Ньютона.

Одно из требований сходимости итерационного процесса состоит в пошаговом уменьшении некоторой нормы, т.е. должно выполняться неравенство

$$\| F_{k+1}(x) \| \le \| F(x_k) \|, \qquad k = 0,1,\ldots,n\,. \qquad (12)$$

Метод Ньютона не гарантированно удовлетворяет этому условию даже в случае одной переменной. Простейшей модификацией метода Ньютона является итерация

$$x_{k+1} = x_k - \omega_k F'(x_k)^{-1} F(x_k), \qquad k = 0,1,\ldots,n, \qquad (13)$$

для которой множитель ω_k выбирается так, чтобы выполнялось условие (10). Достаточные условия существования таких коэффициентов даны в [2].

При плохой обусловленности матрицы производных $F'(x)$ подбором величины λ в итерации (9) можно добиться невырожденности результирующей матрицы $F'(x) + \lambda I$.

Таким образом, итерации типа (9) позволяют решить проблемы применения метода Ньютона, связанные со сходимостью метода и возможной вырожденностью матрицы частных производных $F'(x)$. Существуют и другие подходы, устраняющие указанные трудности практического использования модификаций метода Ньютона.

Избежать операции обращения матрицы Якоби можно, если итерационный процесс представить в виде

$$F(x^k) + F'_x\ (x^{k+1} - x^k) = 0 \qquad (14)$$

Для нахождения x^{k+1} необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений (1), каноническое представление которой имеет вид

$$F'_x(x^k) x^{k+1} = F'_x(x^k) x^k - F(x^k) = 0\,. \qquad (15)$$

Для обеспечения сходимости итераций (1) можно ввести множитель ω^k и выбирать его так, чтобы обеспечить выполнение условий сходимости $\left\|F(x^{k+1})\right\| \le \left\|F(x^k)\right\|$. С учетом множителя ω^k итерационный процесс принимает вид

$$F'_x(x^k)x^{k+1} = F'_x(x^k)x^k - \omega^k F(x^k) = 0 \tag{16}$$

Выбором ω^k можно изменять величину вектора правой части линейной системы уравнений. Однако остается возможность вырожденности матрицы Якоби либо близости к вырожденности (т.е. $\det F'_x(x^k) \approx 0$), снижающей устойчивость решения к различным погрешностям.

В этом случае можно воспользоваться модификацией матрицы Якоби

$$G(x^k) = F'_x(x^k) + \lambda_k I \tag{17}$$

и подбором параметра x^k превратить результирующую матрицу $G(x^k)$ в диагоналедоминантную, что позволит улучшить обусловленность системы уравнений.

Модификация итерационного процесса принимает вид

$$\left[F'_x(x) + \lambda^k I\right]x^{k+1} = \left[F'_x(x^k) + \lambda I\right]x^k - \omega^k F(x^k), \tag{18}$$

позволяющий гарантировать получение приемлемого решения системы (2).

После нескольких итераций (18) и вхождения приближений x^{k+1} в область сходимости метода Ньютона можно вернуться к классической схеме (13), увеличив тем самым скорость сходимости к точному решению исходной системы (2).

Для локальной сходимости метода Ньютона достаточно, чтобы спектральный радиус матрицы $G = I - A^{-1}F'_x(x^*)$ был строго меньше единицы, т.е.

$$R = \rho\left\{I - \left[F'_x(x^*)\right]^{-1} F'_x(x^*)\right\} < 1, \tag{19}$$

Чем меньше величина *R*, тем быстрее сходимость итераций (13).

Пусть $\lambda_1,..., \lambda_n$ – собственные значения матрицы

$$G = I - \left[F'_x(x^*)\right]^{-1} F'_x(x^*), \tag{20}$$

Спектральный радиус матрицы *G* определим как $\rho = \max\limits_i \{\lambda_1,..., \lambda_n\}$

$$\rho = \max_i \{\operatorname{Re}\lambda_1,..., \operatorname{Re}\lambda_n\} \tag{21}$$

где $\operatorname{Re}\lambda_i$ – действительная часть собственного значения λ_i, $i = \overline{1,n}$.

При решении координатно-трассовой задачи сокращение вычислительных операций достигается следующим путями:

- использованием модифицированного метода Ньютона, связанного с уменьшением числа пересчета матрицы частных производных;

- исключением из итеративного процесса одного из уравнений системы (1) в случае, если одна из координат ИРИ не меняется (например, высота полета), а также при достижении заданной точности какой-либо из координат положения ИРИ.

Решение системы уравнений (2) методом Ньютона было проведено в среде компьютерного моделирования MathCAD, в результате которого были получены координаты трассы на основе экспериментальных данных измерения и последующей фильтрации задержек времени прихода сигнала на приемные пункты комплекса пассивной радиолокации. Трасса, представленная на рис. 2, построена при расчете матрицы частных производных на каждом шаге итерации.

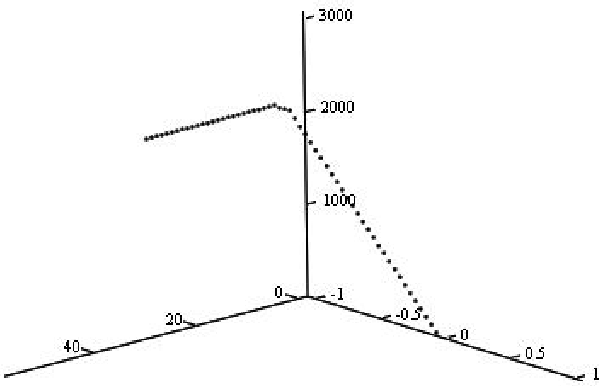

Рис. 2

Кроме того, был проведен анализ возможности сокращения времени расчетов за счет использования матрицы (3) без ее перерасчета на каждом итерационном шаге в результате чего было установлено, что возможно использование одной и той же матрицы для нескольких шагов итерации без существенного ухудшения точности для фиксированного количества итераций. Результаты расчетов приведены в таблице:

$\varepsilon = x_{k+1} - x_k$, м	Количество итераций при пересчете матрицы Якоби на каждом шаге итерации	Количество итераций при пересчете матрицы Якоби на первых двух шагах итерации
10	2	2
0.001	3	3
0.000001	4	4
0.0000001	4	5

Выводы

1. Применительно к решению координатно-трассовых задач пассивными комплексами автоматического обнаружения и построения маршрутов перемещения воздушных целей разработана модификация метода Ньютона для решения систем нелинейных уравнений.

2. Показана целесообразность использования одного и того же определителя матрицы частных производных для двух-трех шагов итерации, что позволяет в два-три раза сократить время расчета при удовлетворительной точности вычислений.

3. Предложенный метод позволяет строить непрерывные трассы воздушных целей при кратковременной потере излучаемых ими сигналов. Допустимый временной интервал отсутствия сигналов равен трем-пяти периодам сканирования антенной системы, установленной на борту цели.

Список литературы: 1. *Ортега, Дж., Рейнболдт, В.* Итерационные методы решения нелинейной системы уравнений со многими неизвестными. – М. : Мир, 1975. – 558 с. 2. *Аверьянов, В. Я.* Разнесенные радиолокационные станции и системы. – Минск : Наука и техника, 1978. – 184 с. 3. *Черняк, В.* Многопозиционная радиолокация. – М. : Радио и связь, 1993. – 415 с. 4. *Радиоэлектронные* системы : справочник. – М. : ЗАО "Маквис", 1998. – 828 с.

ПАО «СКБ РТУ», ИПММ НАНУ

Поступила в редколлегию 15.09.2012