

## АНАЛІЗ СХІДЧАСТОЇ НЕОДНОРІДНОСТІ У МІКРОСМУЖКОВІЙ ЛІНІЇ ПЕРЕДАЧІ МЕТОДОМ ПОПЕРЕЧНОГО РЕЗОНАНСУ: СПОСІБ АЛГЕБРАЇЗАЦІЇ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

### Вступ

Метод поперечного резонансу, за яким розраховуються характеристики розсіювання на неоднорідності у лініях передачі планарного типу у мікрохвильовому діапазоні, базується на розв'язанні крайових задач щодо тривимірних резонаторів, що містять цю, у загальному випадку багат шарову, неоднорідність [1 – 3]. Назву методу обумовлено введенням граничних умов в поперечному по відношенню до неоднорідності напрямку в термінах коефіцієнтів відбиття від ідеальних границь (електричної або магнітної). Ключовим моментом для ефективного розв'язання крайової задачі (наприклад, методом Гальоркіна) є спосіб її алгебраїзації, тобто вибір базису, за яким розкладаються невідомі компоненти поля або струму. У роботах [4, 5] запропоновано опис щільності струмів у смужковій лінії передачі через степеневі функції (поліноми), а вже у роботі 0 запропоновано опис щільності струмів і поля на щілині функціями, що враховують особливості поведінки поля на нескінченно тонкому ребрі як для мікросмужкової, так і для щілинної ліній передачі. Надалі для опису струмів і полів в планарних лініях передачі було запропоновано використовувати поліноми Чебишова першого  $T_n(x)$  та другого  $U_n(x)$  роду 0, які мають вагові функції, що відповідають особливостям поведінки поля на тонкому ребрі.

Однак в нерегулярній лінії передачі, наприклад на індуктивному або ємнісному відрізках у смужкової лінії передачі, опис щільності струму ускладнюється. Це пов'язано з тим, що ортогональні поліноми і тригонометричні функції, за допомогою яких описується електромагнітне поле в екранованій області з прямокутними межами, відповідають різним диференціальним рівнянням. У 0 для побудови функції щільності струму у нерегулярному мікросмужковому резонаторі ми використовували розкладання його за тригонометричним базисом, який задовольняє рівнянню Гельмгольца. Недоліком цього алгоритму є те, що він збігається повільніше (тобто має більший порядок системи лінійних рівнянь), ніж алгоритми, за яким щільність струму описується рядами по базисних функціях з ортогональних поліномів. У 0 для опису щільності струму у нерегулярній (із ступінчастою неоднорідністю) мікросмужковій лінії вперше побудовано двовимірну функцію *магнітного векторного потенціалу* у вигляді ряду по ортогональних поліномах Чебишова першого роду.

Метою даної роботи є побудова повного набору двовимірних функцій, за якими розкладаються *магнітний та електричний векторні потенціали*, що описують розподіл щільності струму у нерегулярній мікросмужковій лінії для подальшого застосування їх у процедурі алгебраїзації крайових задач за розрахунками власних частот тривимірних резонаторів на базі багат шарових планарних структур із смужковими і мікросмужковими лініями передачі із східчастою неоднорідністю кінцевої довжини у них.

### Розв'язання крайової задачі для мікросмужкового резонатора із ємнісною неоднорідністю

Топологію смужкового резонатора із ємнісною (для визначеності) неоднорідністю та поперечними граничними умовами, для якого будується функція розподілу щільності поздовжнього і поперечного струмів, наведено на рис. 1. Там же показано розбиття вихідної області смужкового резонатора на дві часткові підобласті.

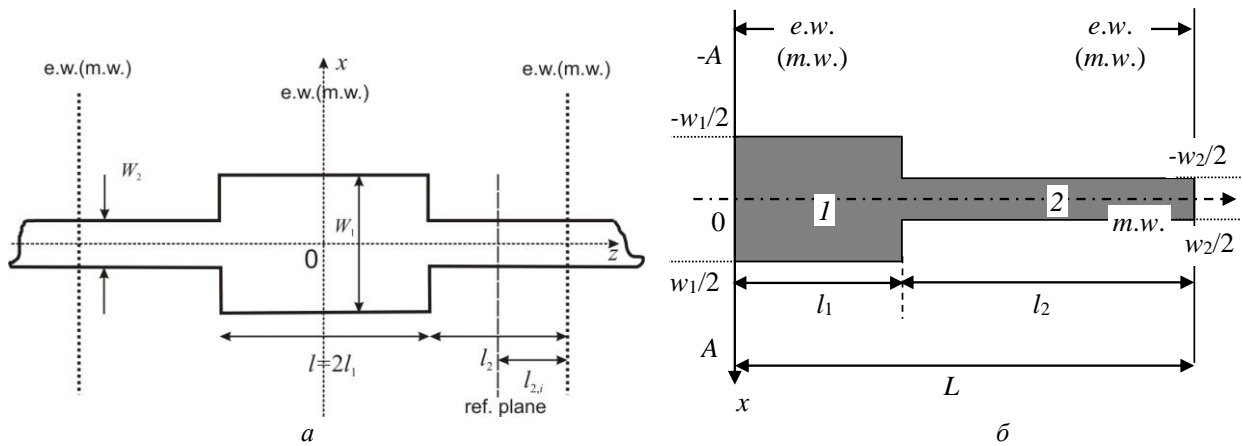


Рис. 1: *a* – топологія смужкової лінії передачі зі стрибком ширини  $w_1 > w_2$  кінцевої довжини, *б* – половина симетричної структури (смушкової лінії) із граничними умовами електричної (e.w.) і магнітної (m.w.) стінок на поздовжніх границях (умови поперечного резонансу), для якої розв’язуються крайові задачі

Умови на поздовжніх границях, електрична і магнітна стінки (e.w. та m.w.), відповідають резонаторам, власні частоти яких використовуються для розрахунку елементів матриці розсіювання на неоднорідності методом поперечного резонансу. У подальшому для стислості крайові задачі із такими граничними умовами будемо називати «електричною» та «магнітною» крайовими задачами відповідно.

Поняття щільності струму  $\mathbf{J}$ , що протікає у смужковій лінії передачі, у електродинаміці мікрохвильового діапазону вводиться через різницю дотичних компонент магнітного поля  $\mathbf{H}$  з обох сторін смужкової лінії передачі:

$$\mathbf{H}_{t,1} - \mathbf{H}_{t,2} = \mathbf{J} \times \mathbf{e}_y.$$

Розглянемо розв’язання крайової задачі для щільності струму  $\mathbf{J}$  мікросмушкового резонатору, що виражений через векторні потенціали магнітного  $J_h$  та електричного  $J_e$  типу, а саме, поздовжня  $z$  і поперечна  $x$  компоненти струму розраховуються за формулою

$$\mathbf{J}_t = \sum_{n=1}^P [\nabla J_{e,n}(x, z) \times \mathbf{e}_y] C_{e,n} - \frac{1}{j \cdot k_0} \sum_{n=1}^P \nabla J_{h,n}(x, z) C_{h,n}, \quad (1)$$

де  $k_0 = \omega_0/c$ ,  $\omega_0$  – кругова частота,  $c$  – швидкість світла у вакуумі,  $J_{h(e),n}(x, z)$  – власні функції магнітного та електричного векторного потенціалу для щільності струму,  $C_{h(e),n}$  – невідомі коефіцієнти розкладання,  $P$  – порядок зрізання ряду.

Компоненти магнітного поля у замкненій (екранованій) структурі задовольняють рівнянню Гальмгольца, тобто хвильовому рівнянню у декартових координатах. Але функція щільності струму в мікросмушкової лінії передачі має особливості на краях смужки (тонкому ребрі) 0, тому для опису щільності струму будемо використовувати поліноми Чебишова першого  $T_n(x)$  і другого  $U_n(x)$  роду, які мають вагові функції  $1/\sqrt{1-x^2}$  та  $\sqrt{1-x^2}$ , що відповідають особливостям поведінки поля на тонкому ребрі та задовольняють власним диференціальним рівнянням.

Основній хвилі смужкової (мікросмушкової) лінії передачі в симетричній структурі відповідає умова магнітної стінки в площині  $x=0$  (рис. 1), то ж отримаємо додаткові умови для функцій електричного і магнітного векторного потенціалів:

$$J_{e,i}(0, z) = 0, \quad \frac{dJ_{h,i}(0, z)}{dx} = 0,$$

$i = 1, 2$  – номер часткової області. З урахуванням цього, двовимірна функція магнітного векторного потенціалу  $J_{h,n}(x, z)$  у часткових областях 1 та 2 розкладається у ряд за ортогональними поліномами Чебишова 1-го роду парного порядку

$$T_{2k}\left(\frac{x}{w_i/2}\right) = \cos\left(2k \arccos \frac{x}{w_i/2}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

що задовольняють рівнянню

$$\left(1 - \left(\frac{x}{w_i/2}\right)^2\right) \frac{d^2}{dx^2} T_{2k}\left(\frac{x}{w_i/2}\right) - \frac{x}{(w_i/2)^2} \frac{d}{dx} T_{2k}\left(\frac{x}{w_i/2}\right) + \left(\frac{2k}{w_i/2}\right)^2 T_{2k}\left(\frac{x}{w_i/2}\right) = 0, \quad i=1, 2, \quad (2)$$

або у операторному вигляді, де  $L$  – диференціальний оператор:

$$L\left(T_{2k}\left(\frac{x}{w_i/2}\right)\right) = -\left(\frac{2k}{w_i/2}\right)^2 T_{2k}\left(\frac{x}{w_i/2}\right). \quad (3)$$

А двовимірна функція електричного векторного потенціалу  $J_{e,n}(x, z)$  розкладається у ряд за ортогональними поліномами Чебишова 2-го роду непарного порядку

$$U_{2k+1}\left(\frac{x}{w_i/2}\right) = \frac{u_{2k+1}\left(\frac{x}{w_i/2}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{w_i/2}\right)^2}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

де  $u_{2k+1}\left(\frac{x}{w_i/2}\right) = \sin\left((2k+2) \arccos \frac{x}{w_i/2}\right)$  – функції Чебишова 2-го роду, що задовольняють тому ж самому диференціальному рівнянню (2), або в операторному вигляді:

$$L\left(u_{2n+1}\left(\frac{x}{w_i/2}\right)\right) = -\left(\frac{2n+2}{w_i/2}\right)^2 u_{2n+1}\left(\frac{x}{w_i/2}\right). \quad (4)$$

Тоді диференціальне рівняння щодо векторних потенціалів щільності струму має вигляд

$$L(J_{h(e),n}(x, z)) + \frac{d^2}{dz^2} J_{h(e),n}(x, z) + \chi_{h(e),n}^2 \cdot J_{h(e),n}(x, z) = 0, \quad (5)$$

$\chi_{h(e),n}^2$  – власні числа, що відповідають власним функціям  $J_{h(e),n}(x, z)$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Крім того, на вільних границях неоднорідної смужкової лінії власні функції задовольняють граничним умовам:

$$\frac{dJ_{hi}(\pm w_i/2, z)}{dx} = 0, \quad J_{ei}(\pm w_i/2, z) = 0, \quad i = 1, 2.$$

На поздовжніх границях  $z=0$  та  $z=L$  електричний  $J_e$  та магнітний  $J_h$  векторні потенціали щільності струму задовольняють таким поперечним граничним умовам:

$$J_{h1}(x, 0) = 0, \quad J_{h2}(x, L) = 0,$$

$$\frac{d}{dz} J_{e1}(x, 0) = 0, \quad \frac{d}{dz} J_{e2}(x, L) = 0$$

за умови ідеальної електричної стінки при  $z=0$  та  $z=L$ , та

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} J_{h1}(x, 0) = 0, \quad J_{h2}(x, L) = 0, \\ J_{e1}(x, 0) = 0, \quad J_{e2}(x, L) = 0 \end{aligned}$$

за умови ідеальної магнітної стінки на них.

Враховуючи вищезазначене, двовимірна функція для магнітного векторного потенціалу у часткових областях 1 та 2 запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} J_{h1}(x, z) &= \sum_{k=0}^M A_{h1k} \sqrt{\frac{2}{w_1}} \sqrt{\frac{4-2 \cdot \delta_{k0}}{\pi}} T_{2k} \left( \frac{x}{w_1/2} \right) F_{h1,k}(z), \quad |x| \leq w_1/2, \quad 0 \leq z \leq l_1, \\ J_{h2}(x, z) &= \sum_{k=0}^M A_{h2k} \sqrt{\frac{2}{w_2}} \sqrt{\frac{4-2 \cdot \delta_{k0}}{\pi}} T_{2k} \left( \frac{x}{w_2/2} \right) F_{h2,k}(z), \quad |x| \leq w_2/2, \quad l_1 \leq z \leq L, \end{aligned} \quad (6)$$

де згідно (2)  $k_{zi,k}^2 = \chi_{h,n}^2 - \left( \frac{2k}{w_i/2} \right)^2 = 0$ ,  $A_{h1(2)k}$  – невідомі коефіцієнти розкладання,  $M$  – порядок зрізання нескінченного ряду та

$$F_{h1,k}(k_{z1k}, z) = \frac{\sin k_{z1k} z}{k_{z1k} \cos k_{z1k} l_1}, \quad F_{h2,k}(k_{z2k}, z) = \frac{\sin k_{z2k} (L-z)}{k_{z2k} \cos k_{z2k} l_2}$$

для крайової задачі із електричними стінками на границях  $z=0$  та  $z=L$  (електрична крайова задача, *e.w.-e.w.*) і

$$F_{h1,k}(k_{z1k}, z) = \frac{\cos k_{z1k} z}{k_{z1k} \sin k_{z1k} l_1}, \quad F_{h2,k}(k_{z2k}, z) = \frac{\cos k_{z2k} (L-z)}{k_{z2k} \sin k_{z2k} l_2}$$

для крайової задачі із магнітними стінками на поздовжніх границях (магнітна крайова задача, *m.w.-m.w.*). Умови безперервності функцій на границі часткових областей з урахуванням сингулярності базисних функцій запишуться наступним чином:

$$J_{h2}(x, l_1) = J_{h1}(x, l_1), \quad |x| \leq w_2/2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{x}{w_1/2} \right)^2}} \frac{dJ_{h1}(x, l_1)}{dz} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{x}{w_2/2} \right)^2}} \frac{dJ_{h2}(x, l_1)}{dz}, & |x| \leq w_2/2 \\ 0, & w_2/2 \leq x \leq w_1/2 \end{cases},$$

звідки отримується система рівнянь щодо невідомих коефіцієнтів розкладання, з умови розв'язності якої виходить трансцендентне рівняння для власних значень  $\chi_{h,n}^2$ . Для «електричної» крайової задачі система рівнянь щодо невідомих коефіцієнтів  $A_{2k}$  має вигляд

$$\sum_{n=0}^M \alpha_{kn} A_{2n} = 0, \quad \alpha_{kn} = \frac{\tan k_{z2n} l_2}{k_{z2n}} \delta_{kn} + \sum_{m=0}^M \frac{\tan k_{z1m} l_1}{k_{z1m}} S_{mk}^h S_{mn}^h, \quad (7)$$

де коефіцієнти  $A_{1k}$  пов'язані із ними співвідношенням  $A_{1k} = -\sum_{m=0}^M S_{km}^h A_{2m}$ , а рівняння щодо  $\chi_{h,n}^2$  має вигляд  $\det \|\alpha_{kn}(\chi_{h,m})\| = 0, m = 1, 2, \dots$  (визначник матриці дорівнює нулю). Аналогічно, для «магнітної» крайової задачі матриця  $\alpha_{kn}$  системи лінійних алгебраїчних рівнянь має вигляд

$$\alpha_{kn} = \frac{\cot k_{z2n} l_2}{k_{z2n}} \delta_{mn} + \sum_{k=0}^M \frac{\cot k_{z1k} l_1}{k_{z1k}} S_{kn}^h S_{km}^h. \quad (8)$$

Значення коефіцієнтів  $S_{km}^h$  розраховуються з інтегралів виду

$$S_{km}^h = \sqrt{\frac{4-2 \cdot \delta_{k0}}{\pi}} \sqrt{\frac{4-2 \cdot \delta_{m0}}{\pi}} \sqrt{\frac{2}{w_1}} \sqrt{\frac{2}{w_2}} \int_0^{w_2/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{w_2/2}\right)^2}} T_{2k} \left(\frac{x}{w_1/2}\right) T_{2m} \left(\frac{x}{w_2/2}\right) dx =$$

$$= c_{km} \int_0^{\pi/2} \cos(2k \arccos(a \cos u)) \cdot \cos(2mu) du, \quad c_{km} = \sqrt{\frac{4-2 \cdot \delta_{k0}}{\pi}} \sqrt{\frac{4-2 \cdot \delta_{m0}}{\pi}} \sqrt{a}, \quad a = \frac{w_2}{w_1}.$$

Інтеграли  $S_{km}^h$  для кожного  $k$  та  $m$  беруться у явному вигляді, розрахунок декількох перших елементів  $S_{km}^h$  показав, що матриця  $\|S_{km}^h\|$  має трикутний вигляд (при зрізанні рядів (6) до  $M$ ), а саме  $S_{km}^h = 0$ , якщо  $k > m$ :

$$S^h = \begin{pmatrix} S_{00} & 0 & \dots & 0 \\ S_{10} & S_{11} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ S_{M0} & S_{M1} & \dots & S_{MM} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

а її елементи являють собою поліноми парного ступеня від параметру  $a = w_2/w_1 < 1$ . Наприклад,  $S_{30}^h = \sqrt{2a}(10a^6 - 18a^4 + 9a^2 - 1)$ ,  $S_{33}^h = \sqrt{a} \cdot a^6$ . Крім того, матриця  $\|\alpha_{kn}\|$  у (7) або (8) симетрична, що також дозволяє скоротити час, що витрачається на розв'язання зрізаної системи рівнянь при чисельних розрахунках на комп'ютерах. За своїм фізичним змістом власні числа  $\chi_{h,n}$  є хвильовими числами, що відповідають поздовжнім гармонікам струму, тому в нульовому наближенні їх спектр розраховується за формулою  $\chi_{h,n}^{(0)} = \pi n/L$ , де  $L = l_1 + l_2$  – довжина резонатору.

Варто зазначити, що диференційне рівняння (5) для магнітний векторного потенціалу щільності струму  $J_h(x, z)$  із «електричними» поперечними умовами має рішення, коли  $\chi_{h,n} = 0$ . Двовимірну функцію у цьому випадку записується у вигляді

$$J_{h1}(x, z) = A_{1,0} \frac{2}{\sqrt{\pi w_1}} T_0 \left(\frac{x}{w_1/2}\right) \cdot z + \sum_{k=1} A_{1k} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi w_1}} T_{2k} \left(\frac{x}{w_1/2}\right) \frac{\sinh k_{x1k} z}{k_{x1k} \cosh k_{x1k} l_1}, \quad |x| \leq w_1/2, \quad 0 \leq z \leq l_1.$$

$$J_{h2}(x, z) = A_{2,0} \frac{2}{\sqrt{\pi w_2}} T_0 \left(\frac{x}{w_2/2}\right) \cdot (L - z) + \sum_{k=1} A_{2k} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi w_2}} T_{2k} \left(\frac{x}{w_2/2}\right) \frac{\sinh k_{x2k} (L - z)}{k_{x2k} \cosh k_{x2k} l_2}, \quad |x| \leq w_2/2,$$

$$l_1 \leq z \leq L.$$

де  $k_{xi,k} = \frac{2k}{w_i/2}$ ,  $i=1,2$ . За своїм фізичним сенсом компонента струму із  $\chi_{h,n} = 0$  відповідає сталій складовій поздовжнього струму  $J_z$ .

Аналогічно, двовимірна функція для електричного векторного потенціалу для щільності струму у часткових областях 1 та 2 записується у вигляді рядів:

$$J_{e1}(x, z) = \sum_{k=0}^M A_{e1k} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2}{w_1}} U_{2k+1} \left( \frac{x}{w_1/2} \right) F_{e1,k}(z), \quad |x| \leq w_1/2, \quad 0 \leq z \leq l_1,$$

$$J_{e2}(x, z) = \sum_{k=0}^M A_{e2k} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2}{w_2}} U_{2k+1} \left( \frac{x}{w_2/2} \right) F_{e2,k}(z), \quad |x| \leq w_2/2, \quad l_1 \leq z \leq L. \quad (10)$$

де згідно (4)  $k_{zi,k}^2 = \chi_{e,n}^2 - \frac{(2k+2)^2}{(w_i/2)^2}$ ,  $A_{e1(2)k}$  – невідомі коефіцієнти розкладання та

$$F_{e1,k}(k_{z1k}, z) = \frac{\cos k_{z1k} z}{\cos k_{z1k} l_1}, \quad F_{e2,k}(k_{z2k}, z) = \frac{\cos k_{z2k} (L-z)}{\cos k_{z2k} l_2}$$

для крайової задачі із електричними стінками на границях  $z=0$  та  $z=L$  (задача е.в.-е.в.) і

$$F_{e1,k}(k_{z1k}, z) = \frac{\sin k_{z1k} z}{\sin k_{z1k} l_1}, \quad F_{e2,k}(k_{z2k}, z) = \frac{\sin k_{z2k} (L-z)}{\sin k_{z2k} l_2}$$

для крайової задачі із магнітними стінками на поздовжніх границях (задача м.в.-м.в.). Умови безперервності функцій на границі часткових областей мають вигляд

$$\frac{dJ_{e2}(x, l_1)}{dz} = \frac{dJ_{e1}(x, l_1)}{dz}, \quad 0 \leq x \leq w_2/2,$$

$$\sqrt{1 - \left( \frac{x}{w_1/2} \right)^2} J_{e1}(x, l_1) = \begin{cases} \sqrt{1 - \left( \frac{x}{w_2/2} \right)^2} J_{e2}(x, l_1), & |x| \leq w_2/2 \\ 0, & w_2/2 \leq |x| \leq w_1/2 \end{cases}.$$

Тоді система рівнянь щодо невідомих коефіцієнтів розкладання для «електричної» крайової задачі записується у вигляді

$$\sum_{n=0}^M \alpha_{kn} A_{2n} = 0, \quad \alpha_{kn} = k_{z2k} \tan k_{z2k} l_2 \cdot \delta_{kn} + \sum_{m=0}^M k_{z1m} \tan k_{z1m} l_1 \cdot S_{mn}^e S_{mk}^e \quad (11)$$

де зв'язок між коефіцієнтами є  $A_{1m} = \sum_{n=0}^M A_{2n} S_{mn}^e$  та рівняння щодо спектру власних значень

$\chi_{e,m}^2, m=1,2,\dots$  є умовою розв'язання однорідної системи рівнянь  $\det \|\alpha_{kn}(\chi_{e,m})\| = 0$ . Аналогічно, для «магнітної» крайової задачі матриця  $\alpha_{kn}$  має вигляд:

$$\alpha_{kn} = k_{z2k} \cot k_{z2k} l_2 \cdot \delta_{kn} + \sum_{m=0}^M k_{z1m} \cot k_{z1m} l_1 \cdot S_{mn}^e S_{mk}^e. \quad (12)$$

Значення коефіцієнтів  $S_{mk}^e$  електричного векторного потенціалу  $J_e(x, z)$  розраховуються з інтегралів виду:

$$S_{mk}^e = \frac{4}{\pi} \frac{2}{\sqrt{w_1 w_2}} \int_0^{w_2/2} \frac{u_{2k+1} \left( \frac{x}{w_1/2} \right) u_{2m+1} \left( \frac{x}{w_2/2} \right)}{\sqrt{1 - \left( \frac{x}{w_1/2} \right)^2}} dx =$$

$$= \frac{4}{\pi} \sqrt{a} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \left( (2k+2) \arccos(a \cos u) \right)}{\sqrt{1 - (a \cos u)^2}} \cdot \sin \left( (2m+2) u \right) \cdot \sin u du,$$

де  $a = w_2/w_1$ . Як і вище, інтеграли  $S_{mk}^e = 0$  якщо  $m > k$ , тобто матриця  $\|S_{mk}^e\|$  також має трикутний вигляд (9), а її елементи являють собою поліноми непарного ступеня від параметру  $a = w_2/w_1 < 1$ . Наприклад,  $S_{00}^e = \sqrt{aa}$ ,  $S_{10}^e = 2\sqrt{a} \cdot (a^3 - a)$ ,  $S_{11}^e = \sqrt{a} \cdot a^3$ .

Коефіцієнти розкладання функцій щільності струму за поліноміальним базисом у всіх крайових задачах визначаються із точністю до деякого сталого множника, що визначається з умови нормування:

$$\int_{S_{MSL}} \left[ \nabla J_{h(e),n}(x,z) \right]^2 dS = \chi_{h(e),n}^2 \int_{S_{MSL}} J_{h(e),n}^2(x,z) dS = 1.$$

У такий же спосіб будуватиметься і двовимірна функція гібридної крайової задачі для щільності струму із поперечними граничними умовами магнітної стінки в площині  $z=0$  і електричної стінки в площині  $z=L$  (задача виду  $mw$ - $ew$ ).

Розв'язання «електричної» і «магнітної» крайових задач для власних функцій щільності струму в нерегулярній екранованій смужковій лінії використовується для алгебраїзації за формулою (1) крайових задач для резонаторів із неоднорідностями, що містять індуктивні або ємнісні відрізки смужкової лінії передачі (рис. 2), подробиці алгоритмів є у роботах 0. Інтеграли зв'язку  $\alpha_{h,q,mn}^m$ ,  $\beta_{h,q,mn}^m$  та  $\gamma_{h,q,mn}^m$  між неоднорідним смужковим резонатором і об'ємним прямокутним резонатором розраховуються за формулами:

$$\alpha_{h,q,mn}^m = \int_{S_{MSL}} \nabla J_{h,q}(x,z) \left[ \nabla \psi_{mn}(x,z) \times \mathbf{e}_y \right] dS, \quad \beta_{h,q,mn}^m = \int_{S_{MSL}} \nabla J_{h,q}(x,z) \nabla \phi_{mn}(x,z) dS,$$

$$\gamma_{h,q,mn}^m = \int_{S_{MSL}} \left[ \nabla J_{e,q}(x,z) \times \mathbf{e}_y \right] \cdot \left[ \nabla \psi_{mn}(x,z) \times \mathbf{e}_y \right] dS \quad (13)$$

де  $\phi_{mn}(x,z)$ ,  $\psi_{mn}(x,z)$  – базисні функції електричного і магнітного векторного потенціалу об'ємного прямокутного резонатору 0 ( $k_{xm} = \pi(2m-1)/2A$ ,  $k_{zn} = \pi n/L$ ):

$$\phi_{mn}(x,z) = \begin{cases} P_{mn} \cos k_{xm} x \sin k_{zn} z, & ew - ew \\ P_{mn} \cos k_{xm} x \cos k_{zn} z, & mw - mw \end{cases}, \quad \psi_{mn}(x,z) = \begin{cases} P_{mn} \sin k_{xm} x \cos k_{zn} z, & ew - ew \\ P_{mn} \sin k_{xm} x \sin k_{zn} z, & mw - mw \end{cases}, \quad (14)$$

$$P_{mn} = \sqrt{\frac{2}{A}} \sqrt{\frac{2 - \delta_{n0}}{L}} \frac{1}{\chi_{mn}}, \quad \chi_{mn}^2 = k_{xm}^2 + k_{zn}^2.$$

Електричний і магнітний векторні потенціали прямокутного резонатору (рис. 2) записуються у вигляді подвійних рядів Фур'є:

$$A_{ey,i} = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1(0)}^N \phi_{mn}(x,z) F_{ei,mn}(k_{yi,mn}),$$

$$A_{hy,i} = \sum_{m=1}^N \sum_{n=0(1)}^N \psi_{mn}(x,z) F_{hi,mn}(k_{yi,mn}),$$
(15)

де  $k_{yi,mn}^2 = k_0^2 \epsilon_{ri} - \chi_{mn}^2$ ,  $i=1,2$  – номер часткової області,  $N$  – порядок зрізання рядів. Функції  $F_{e(h)i,mn}(k_{yi,mn}^2)$  із невідомими коефіцієнтами розкладання наведено, наприклад у 0.

Інтеграли зв'язку (13) використовуються як для розрахунку характеристик розсіювання окремої ступінчастою неоднорідності в мікросмужковій лінії передачі (рис. 2), так і для аналізу багат шарової неоднорідності, що складається, наприклад з ємнісного відрізка у мікросмужковій лінії і щілинного резонатора в її заземлюючій площині 0.

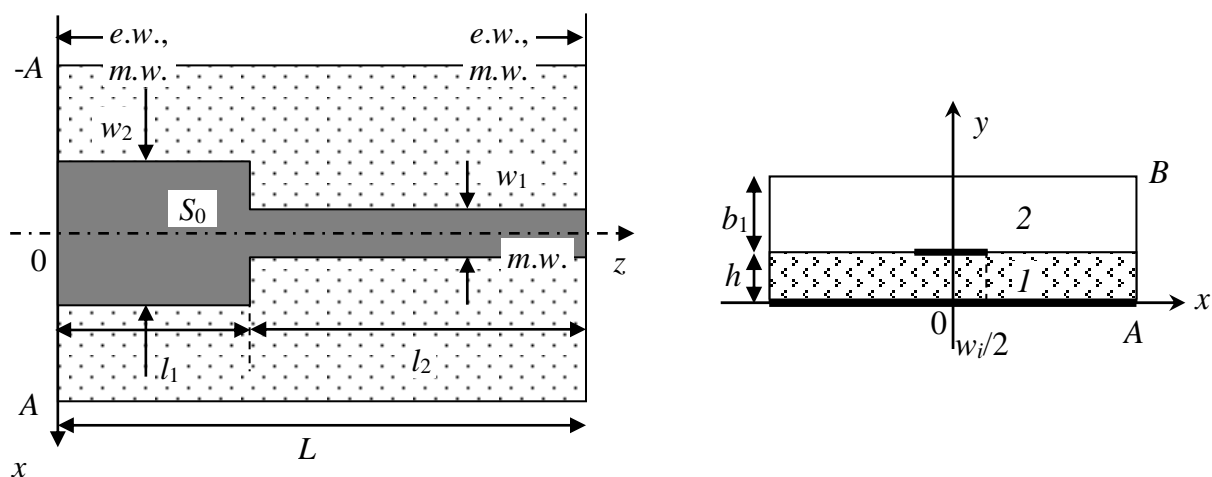


Рис. 2. Топологія екранованої двошарової планарної структури із ємнісною неоднорідністю в мікросмужковій лінії передачі для розв'язання крайових задач.  $A, B$  – розміри екрану,  $h$  – товщина діелектричної підкладки із проникністю  $\epsilon_r$

### Дослідження збіжності алгоритму та результати аналізу одного двошарових неоднорідностей в планарних структурах, що містять ємнісний відрізок мікросмужкової лінії передачі

Алгоритм аналізу східчастої неоднорідності у смужковій або мікросмужковій лінії передачі методом поперечного резонансу, що описаний вище, виходить достатньо складним. Процедура його алгебраїзації визначається трьома групами рядів: два ряди у (1), ряди (6), (10) та два ряди (15). Перша група рядів (6) та (10) визначає власні функції щільності струму у неоднорідній смужці. Друга група рядів (1) визначає поздовжні гармоніки щільності струму на смужці. І, наприкінці, третя група рядів (15) визначає Фур'є-компоненти електромагнітного поля у прямокутній екранованій області (об'ємному резонаторі із поперечними граничними умовами при  $z=0$  та  $z=L$ ). Тому перш, ніж аналізувати за цим алгоритмом неоднорідності, треба провести його дослідження на збіжність, щоб визначити порядки зрізання кожної групи рядів.

На рис. 3 показано розв'язання «електричної» ( $e.w.-e.w.$ ) і «магнітної» ( $m.w.-m.w.$ ) крайових задач на власні числа  $\chi_{h(e),m}$ ,  $m=1,2,\dots$  векторних потенціалів магнітного і електричного типу для смужкового резонатора із ємнісним відрізком у ньому (рис. 1) при співвідношенні  $a = w_2/w_1 = 1/3$ . Результати були отримані при зрізанні рядів (5), (8) і систем рівнянь (6), (9) до значень  $M=3$  для обох крайових задач. При збільшенні порядку зрізання  $M$  значення влас-



них чисел  $\chi_{h(e),m}$  відрізняються від значення, отриманого при  $M=3$ , не більше, ніж на  $10^{-3}$ .

Крім того, «електрична» задача має розв'язання для  $\chi_{h,0} = 0$ .

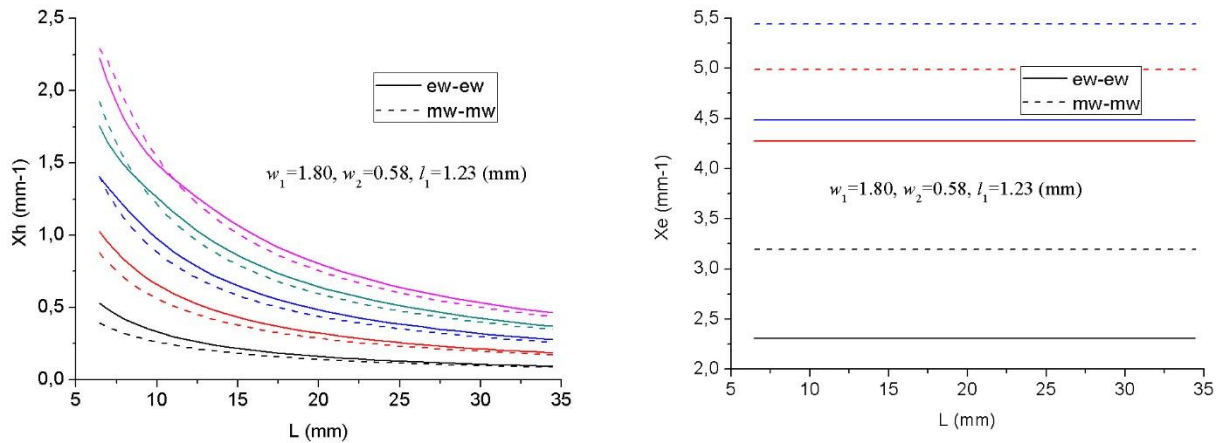


Рис. 3. Власні числа  $\chi_{h,n}$  та  $\chi_{e,n}$  базисних функцій магнітного  $J_h(x,z)$  та електричного  $J_e(x,z)$  векторних потенціалів смужкового резонатору із ємнісною відірзанкою, отримані із розв'язання «електричної» і «магнітної» крайових задач (параметр  $a=1/3$ )

На рис. 4 представлено збіжність алгоритму аналізу ємнісної неоднорідності у мікросмужковій лінії передачі: результати розрахунків власних частот резонатору, отриманих з розв'язання (а) електричної та (б) магнітної крайових задач. Параметри для розрахунків (у мм):  $h=0.635$ ,  $\epsilon_r=10.2$ ,  $A=15.0$ ,  $b_1=7.0$ ,  $w_1=2.40$ ,  $w_2=0.58$  ( $a=0.25$ ),  $l_1=2.2$  ( $l=4.4$ ),  $l_2=15.125$

Тут і далі розрахунки виконано для матеріалу підкладки Ro3010 товщиною  $h=0.635$  мм із діелектричної проникністю  $\epsilon_r=10.2$ , ширина і висота екрана об'ємного резонатору дорівнюють відповідно  $A=15.0$  та  $b_1=7.0$  мм, інші параметри структури (у мм):  $w_1=2.4$ ,  $w_2=0.58$  (характеристичний імпеданс основної лінії передачі дорівнює  $Z_0=50$  Ом),  $l_1=2.2$  ( $l=4.4$ ),  $l_2=15.125$ . При сталому числі  $M$  базисних функцій з ортогональних поліномів, що враховуються, та зрізання рядів (1) за власними функціями векторних потенціалів до  $P=4$  достатня збіжність алгоритму спостерігається при зрізання рядів (15) до  $N=300$  (ліва половина рис. 4, а). Збільшення числа  $M$  базисних функцій (при сталому  $N$ ), за якими розкладаються векторні потенціали щільності струму, навпаки, призводить до чисельної нестабільності рішення щодо резонансної частоти (права половина рис. 4, а). Таким чином, для даної структури розрахунки власної частоти резонатору можна проводити при параметрах зрізання (редукції) рядів, що дорівнюють  $N=300$ ,  $M=4$ ,  $P=4$ . Аналогічні дослідження збіжності алгоритму наведено для «магнітної» крайової задачі, див. рис. 4, б.

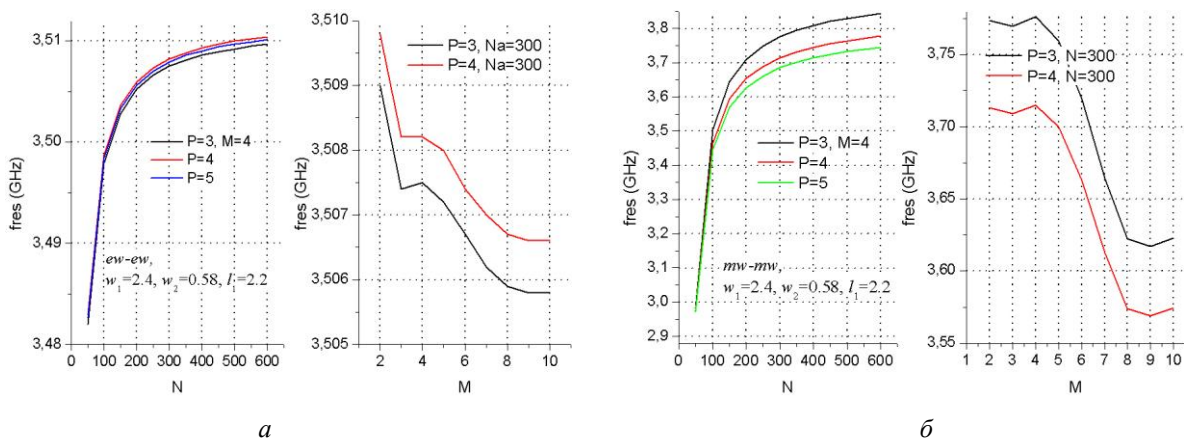


Рис. 4. Збіжність алгоритму аналізу ємнісної неоднорідності у мікросмужковій лінії передачі: результати розрахунків власних частот резонатору, отриманих з розв'язання (а) електричної та (б) магнітної крайових задач.

Параметри для розрахунків (мм):

$h=0.635$ ,  $\epsilon_r=10.2$ ,  $A=15.0$ ,  $b_1=7.0$ ,  $w_1=2.40$ ,  $w_2=0.58$  ( $a=0.25$ ),  $l_1=2.2$  ( $l=4.4$ ),  $l_2=15.125$

Порядок  $N$  зрізання рядів (15) визначається перш за все розміром екрану  $A$ : чим він більший – тим більше членів ряду (15) треба враховувати. Якщо базисні функції, за якими розкладається поле та щільність струму в екранованій області, відносяться до одного типу (зазвичай, це тригонометричні функції), то співвідношення порядків зрізання рядів визначається співвідношеннями геометричних параметрів, наприклад  $2A/w$ ,  $w$  – ширина смужки 0. У нашому випадку це дорівнює  $2A/w_1=50$ , тобто, при  $N=600$  порядок зрізання ряду (6) мав би дорівнювати  $M=12$ , але використання для опису щільності струму базису з ортогональних поліномів зменшує значення  $M$  до  $M=3\div 4$ , а при його збільшенні також спостерігається ефект чисельної нестабільності 0.

На рис. 5, *а*, *б* наведено спектри власних частот, отримані з розв'язання двох крайових задач для мікросмужкового резонатору із ємнісною неоднорідністю із параметрами  $w_1=2.4$ ,  $w_2=0.58$  та двома різними значеннями довжини ємнісного відрізка  $l_1=2.2$  та  $l_1=4.8$ . З характеристик видно, що зі збільшенням довжини ємнісного відрізка (неоднорідності) в спектрі власних частот об'ємного резонатору збільшується число його гілок, які використовуються для розрахунку характеристик розсіювання за методом поперечного резонансу.

З характеристик видно, що зі збільшенням довжини ємнісного відрізка (неоднорідності) в спектрі власних частот об'ємного резонатору збільшується число його гілок, які використовуються для розрахунку характеристик розсіювання за методом поперечного резонансу.

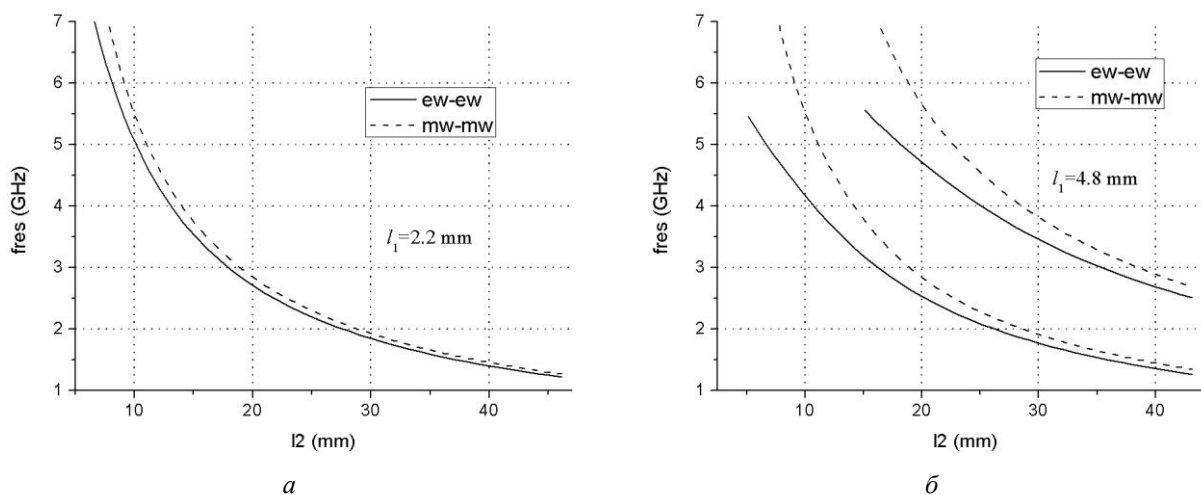


Рис. 5. Спектр власних частот мікросмужкового резонатору із ємнісним відрізком лінії передачі, отриманий з розв'язання «електричної» і «магнітної» крайових задач із параметрами (у мм)  $w_1=2.40$ ,  $w_2=0.58$ : *а* –  $l=2l_1=4.40$ , *б* –  $l=2l_1=9.6$ . Параметри резонатору та підкладки – ті ж самі, що і на рис. 4

На рис. 6 показана топологія тришарової планарної структури із 2-площинною неоднорідністю: ємнісним відрізком у мікросмужковій лінії та Н-подібним щілинним резонатором із поперечним розташуванням «гантелей» у заземлюючій площині. Подібна щілинна неоднорідність вже була нами розглянута у 0, а у комбінації із індуктивною неоднорідністю у мікросмужковій лінії – у роботі 0. У 0 та 0 описано також чисельну методику, за якої для скорочення часу, що витрачається на аналіз однієї частотної точки, спектральні криві апроксимуються раціональними функціями виду  $f(x)=1/Q_m(x)$ , де  $Q_m(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_mx^m$  поліном порядку  $m$ .

На рис. 7 наведено спектр власних частот двоплощинної неоднорідності, отриманий з розв'язання крайових задач, та її характеристики розсіювання, отримані за методом поперечного резонансу. Щілинний резонатор доданий до східчної неоднорідності, характеристики якої наведено на рис. 5*а* (параметр  $a=0.25$ ).

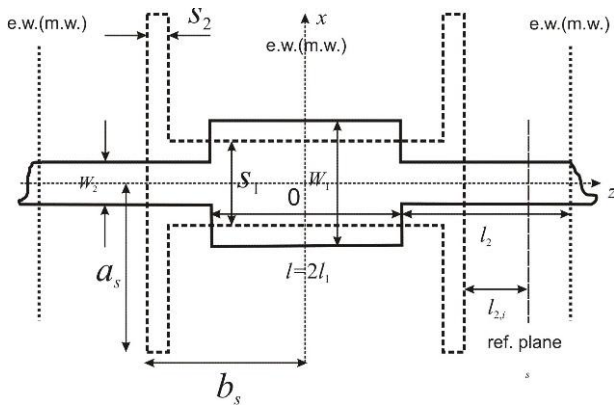


Рис. 6. Топологія 2-площинної симетричної неоднорідності у тришаровій планарній структурі: ємнісний відрізок мікросмужкової лінії передачі та Н-подібний щілинний резонатор у заземлюючій площині

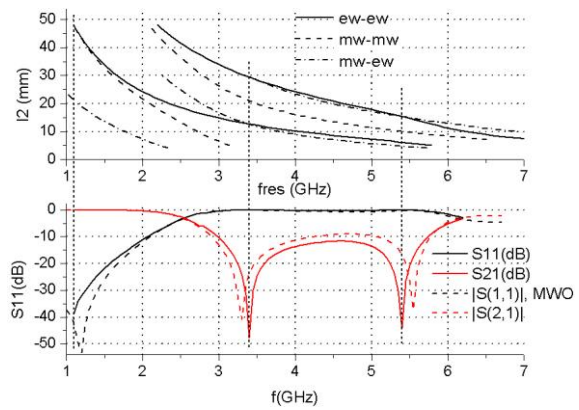


Рис. 7. Спектр власних частот мікросмужкового резонатора з двоплощинною неоднорідністю, отриманий при розв'язанні трьох крайових задач: «електричної», «магнітної» і «магнітоелектричної» і відповідні характеристики розсіювання. Параметри структури (у мм):  $w_1=2.40$ ,  $w_2=0.58$ ,  $l=2l_1=4.4$ ,  $a_s=9.9$ ,  $b_s=4.2$ ,  $s_1=1.2$ ,  $s_2=0.4$

Точки перетину кривих, отриманих з розв'язання електричної та магнітоелектричної крайової задачі визначають частоти резонансного відбиття основної хвилі мікросмужкової лінії (мінімуми коефіцієнту передачі  $S_{21}$ ). Аналогічно, точки перетину кривих, отриманих з розв'язання електричної та магнітної задач, визначають частоти резонансного пропускання основної хвилі мікросмужкової лінії (мінімуми коефіцієнту відбиття  $S_{11}$ ). Розрахунки характеристик розсіювання методом поперечного резонансу виконано за апроксимацією спектральних кривих зворотними поліномами  $f(x)=1/Q_m(x)$  порядку  $m=10$ . На рисунку, для порівняння, також наведено результати аналізу структури у комерційній програмі з аналізу планарних структур мікрохвильового діапазону (MWO).

Ще один приклад топології широкосмужкового режекторного фільтру наведено на рис. 8 – топологія 2-площинної симетричної неоднорідності у тришаровій планарній структурі: ємнісний відрізок мікросмужкової лінії передачі та два Н-подібних щілинних резонатор із поперечним розташуванням у заземлюючій площині.

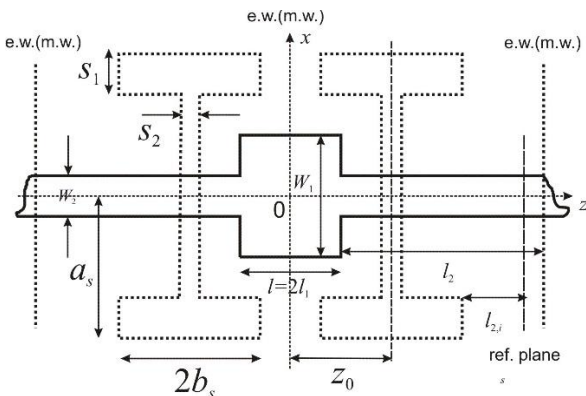


Рис. 8. Топологія 2-площинної симетричної неоднорідності у тришаровій планарній структурі: ємнісний відрізок мікросмужкової лінії передачі та два Н-подібних щілинних резонатор із поперечним розташуванням у заземлюючій площині

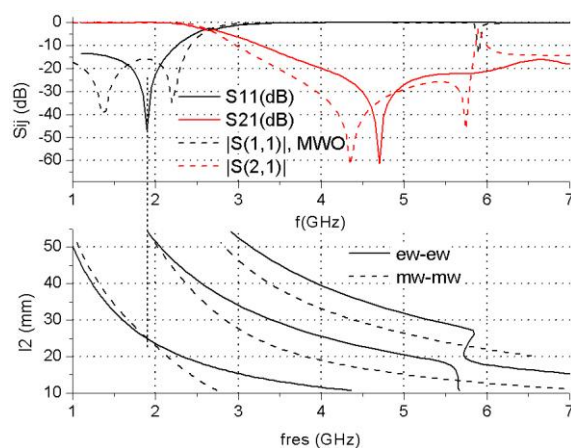


Рис. 9. Спектр власних частот мікросмужкового резонатора з двоплощинною неоднорідністю, що на рис. 8, та відповідні характеристики розсіювання. Параметри структури (у мм):  $w_1=2.70$ ,  $w_2=1.20$ ,  $l=2l_1=1.2$ ,  $z_0=4.6$ ,  $a_s=3.5$ ,  $b_s=3.0$ ,  $s_1=1.36$ ,  $s_2=0.4$ .

Результати аналізу симетричної неоднорідності у вигляді двох пов'язаних щілинних резонаторів та ємнісного відрізка мікросмужкової лінії показано на рис. 9 – спектр власних частот мікросмужкового резонатору з двоплощинною неоднорідністю, що на рис. 8, та відповідні характеристики розсіювання. Параметри структури (у мм):  $w_1=2.70$ ,  $w_2=1.20$ ,  $l=2l_1=1.2$ ,  $z_0=4.6$ ,  $a_s=3.5$ ,  $b_s=3.0$ ,  $s_1=1.36$ ,  $s_2=0.4$ . У роботі 0 подібні щілинні резонатори було проаналізовано у регулярній мікросмужковій лінії передачі, також було показано, що щілинні резонатори складної форми взаємодіють на порівняно великих відстанях, що призводить до появи додаткових частот резонансної взаємодії їх із мікросмужковою лінією передачі. У даному випадку аналізується двоплощинна розподілена неоднорідність довжиною порядку півдовжини основної хвилі мікросмужкової лінії на частоті 3.0 ГГц. Спектральний підхід дозволяє проаналізувати цю неоднорідність цілком, без розбиття на компоненти, за алгоритмом із невеликим порядком системи рівнянь, що розв'язуються, та передбачити точки резонансної взаємодії розподіленої неоднорідності із основною лінією передачі.

## Висновки

1. Побудовано двовимірні власні функції магнітного і електричного векторного потенціалів у вигляді розкладання їх в ряди за ортогональними поліномами Чебишова першого та другого роду для опису щільності струму у смужковій лінії передачі із ступінчастою неоднорідністю у ній. Перевагою використання даних функцій є скорочення часу, що витрачається на розрахунок матриць зв'язку на стику двох смужкових ліній різної ширини, малий порядок системи рівнянь та швидка збіжність алгоритму.

2. Побудовано алгоритми розв'язання задач на власні функції і власні значення векторних потенціалів із різними умовами на поздовжніх межах (для подальшого застосування їх у процедурі алгебраїзації крайових задач за методом поперечного резонансу).

3. Побудовано та досліджено на збіжність алгоритми розв'язання крайових задач на резонансні частоти мікросмужкового резонатору із ємнісним відрізком кінцевої довжини в ньому. Як приклади застосування, методом поперечного резонансу розраховані характеристики розсіювання на двоплощинних симетричних неоднорідностях, що складаються з ємнісного відрізка мікросмужкової лінії та Н-подібних щілинних резонаторів із поздовжнім та поперечним розташуванням «гантелей» в її заземлюючій площині.

## Список літератури:

1. Itoh T. (Ed.) Numerical techniques for microwave and millimeter-wave passive structures. New York : Wiley, 1989. 707 p.
2. Bornemann J., Arndt F. Transverse resonance, standing wave, and resonator formulations of the ridge waveguide eigenvalue problem and its application to the design of E-plane finned waveguide filters // IEEE Trans. on MTT. 1990. V. 38, No 8. P. 1104–1113.
3. Schwab W., Menzel W.. On the design of planar microwave components using multilayer structures // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1992. vol. MTT-40, No 1. P. 67–72.
4. Itoh T., Mittra R. A Technique for Computing Dispersion Characteristics of Shielded Microstrip Lines // IEEE Trans. on Microw. Theory and Techn. 1974. V. 22, No 10. P. 896–898.
5. Itoh T. Analysis of Microstrip Resonators // IEEE Trans. on Microw. Theory and Techn. 1974, V. 22, No 11. P. 946–952.
6. Itoh T. Spectral Domain Imittance Approach for Dispersion Characteristics of Generalized Printed Transmission Lines // IEEE Trans. on Microw. Theory and Techn. 1980. V. 28, No 7. P. 733–736.
7. Веселов Г. И. Микроэлектронные устройства СВЧ. Москва : Высш. шк., 1988. 280 с.
8. Рассохина Ю. В., Крыжановский В. Г. Метод анализа неоднородностей в полосково-щелевых структурах. Ч. 1: Анализ скачка ширины в микрополосковой линии методом поперечного резонанса // Радиотехника. 2016. Вып. 187. С. 91–99.
9. Yulia V. Rassokhina; Vladimir G. Krizhanovski. The microstrip line step discontinuity analysis by transverse resonance technique: Method of boundary value problem algebraization // 14th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET). Year: 2018. P 632–636. (IEEE Conferences).
10. Рассохина Ю. В., Крыжановский В. Г.. Метод анализа неоднородностей в полосково-щелевых структурах. Ч. 2: Анализ комплексных неоднородностей в трехслойных планарных структурах // Радиотехника. 2017. Вып. 188. С. 20–25.

11. Bornemann J.. A scattering-type transverse resonance technique for the calculation of (M)MIC transmission line characteristics // IEEE Trans. on Microw. Theory and Techn. 1991. V. 39, No 12. P. 2083–2088.
12. Рассохина Ю. В., Крыжановский В. Г. Режекторный фильтр на H-образном щелевом резонаторе в экранирующем слое микрополосковой линии // Радиотехника. 2015. Вып. 182. С. 129–136.
13. Rassokhina Yu. V. Krizhanovski V. G. The Analysis of Distributed Two-Layers Components in Three-Layer Planar Structure // Visn. NTUU KPI, Ser. Radiotekh. radioaparotobuduv. 2018. № 72. С. 5–12.
14. Рассохина Ю. В., Крыжановский В. Г. Анализ связанных щелевых резонаторов сложной формы в металлизированной плоскости микрополосковой линии передачи методом поперечного резонанса // Изв. ВУЗов «Радиоэлектроника». 2012. Т. 55, №5. С. 29–39.

*Донецький національний  
університет імені Василя Стуса (м. Вінниця)*

*Надійшла до редколегії 17.12.2018*