

ДИФРАКЦІЯ *H*- ПОЛЯРИЗОВАНИХ ФОТОНІВ НА НЕСКІНЧЕННІЙ ГРАТЦІ МЕТАЛЕВИХ СТРИЧОК

В роботі розглянуто задачу про дифракцію *H*-поляризованих фотонів при нормальному падінні потоку на ґратку, утворену необмеженою послідовністю нескінченно тонких металевих стрічок. Задача про визначення Ψ -функції фотона над та поза ґраткою зводиться до краєвої задачі Рімана – Гільберта [1]. Отримано точні вирази для Ψ -функції у вигляді нескінченної системи алгебраїчних рівнянь, що сходяться як $\frac{1}{n^2}$ при $n \rightarrow \infty$. Для деяких значень параметрів проведені обчислення за наближеними формулами.

Постановка задачі

З боку негативних значень z на ґратку, розташовану в площині xOy , падає нормально однорідний потік *H*-поляризованих фотонів. Якщо ширина щілини, відстань між сусідніми стрічками дорівнює d , а період ґратки – l , то ширина стрічки дорівнює $l - d$ (рис. 1).

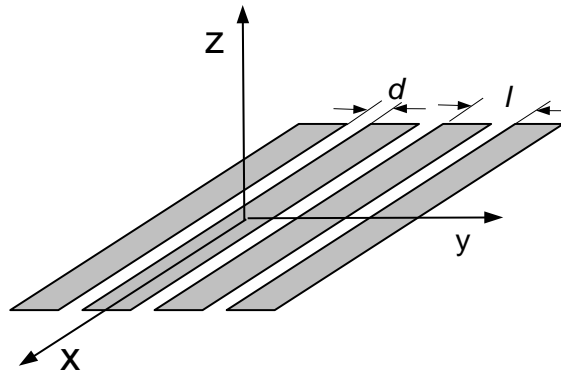


Рис. 1. Дифракційна ґратка

Щоб визначити густину ймовірності $|\Psi|^2$ фотонів, що відбиваються, та тих фотонів, що пройшли крізь ґратку, зручно скористатися теорією де Бройля [2]. Згідно з цією теорією Ψ -функція може бути представлена у вигляді плоскої хвилі

$$\Psi(z) = e^{-ikz}, \quad (1)$$

де часовий множник $e^{-i\omega t}$ в даному виразі опускається, а розглядається лише стаціонарний процес.

Згідно з положеннями квантової механіки Ψ -функція повинна бути однозначною, неперервною і обмеженою, та мати неперервну похідну. Вона повинна також задовольняти стаціонарному рівнянню Шредінгера [3].

В області над ($z \leq 0$) та під ($z \geq 0$) ґраткою Ψ -функція розсіяного фотона повинна задовольняти двовимірному рівнянню

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{m}{\hbar^2} E \Psi = 0, \quad (2)$$

в металевих стрічках рівнянню

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{m}{\hbar^2} (U - E) \Psi = 0, \quad (3)$$

де m і E – маса і енергія частинки відповідно, U – потенціальна енергія, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h – стала

Планка. Якщо вважати, що в метал фотони не проникають, на межі метал-вакуум вони натикаються на нескінченно високий нескінченно вузький потенціальний бар'єр $U = \infty$, то в металевих стрічках Ψ -функція фотона тотожно дорівнює нулю. В областях перед та за ґраткою рівняння (2) для фотона приймає вигляд

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + k^2 \Psi = 0, \quad (4)$$

тобто воно збігається з хвильовим рівнянням для електромагнітної хвилі: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ – довжина хвилі. Із міркувань симетрії випливає, що для однорідного потоку фотонів Ψ -функція не повинна залежати від координати x , і внаслідок періодичності структури повинна бути періодичною функцією (з періодом l) у напрямку осі y . Отже, її можна розкласти в ряд Фур'є [4]:

$$\Psi(y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_n(z) e^{i \frac{2\pi n}{l} y}. \quad (5)$$

Якщо дотримуватися моделі явища дифракції, запропонованої в роботі [1], можна вважати, що частота фотонів розсіяних ґраткою залишається незмінною, коефіцієнти Ψ_n над та під ґраткою повинні визначатися сумою двох складових:

$$\Psi_n(z) = A_n \exp\left[iz\sqrt{k^2 - (2\pi n/l)^2}\right] + B_n \exp\left[-iz\sqrt{k^2 - (2\pi n/l)^2}\right]. \quad (6)$$

Як і в роботі [1] під коренем $\sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2}$ будемо вважати те його значення, яке має

позитивну уявну частину, а якщо вона дорівнює нулю – позитивну реальну частину.

Тоді у верхньому півпросторі Ψ -функція (амплітуда ймовірності) буде мати вигляд

$$\Psi^{(I)}(y, z) = e^{-ikz} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \exp\left(i\sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2} z\right) \cdot \exp\left(i\frac{2\pi n}{l} y\right), \quad (7)$$

де перша складова відповідає амплітуді ймовірності падаючого на ґратку фотона, а друга – відбитого.

В нижньому півпросторі амплітуда ймовірності фотона, який пройшов крізь одну із щілин,

$$\Psi^{(II)}(y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \exp\left(-i\sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2} z\right) \cdot \exp\left(i\frac{2\pi n}{l} y\right). \quad (8)$$

За де Бройлем [2] правила переходу від однієї картини до іншої фотон має енергію $E = \hbar\omega$, та імпульс $p = k\hbar = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}$. Отже для фотона, відбитого від ґратки, або такого, що пройшов через ґратку, можна записати вирази:

$$\begin{aligned}\Psi_r &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \exp \frac{i}{\hbar} (-p_z z + p_y y), \\ \Psi_t &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \exp \frac{i}{\hbar} (p_z z + p_y y),\end{aligned}\quad (9)$$

де p_z, p_y відповідно z та y – компоненти імпульсу фотона.

В класичній електродинаміці плоска хвиля падає на ґратку і дифракційне поле подається у вигляді суми просторових гармонік, кожна з яких поширюється під кутом, тангенс якого визначається співвідношенням

$$tq\alpha_n = \frac{k_y}{k_z} = \frac{2\pi n/l}{\sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2}}. \quad (10)$$

Після простих тригонометричних перетворень із (7) отримуємо рівняння, відоме із оптики як рівняння дифракційної ґратки [5]:

$$l \sin \alpha_n = n\lambda \quad (11)$$

Виходячи із припущення про те, що фотон, який проходить через щілину, отримує складову імпульсу в напрямку, перпендикулярному до його первинного напрямку руху внаслідок пружної взаємодії з електроном стрічки, в роботах [6 - 8] в наближенні вузької щілини отримано також вираз, що збігається з рівнянням (11). В даному випадку підхід був оснований на застосуванні законів збереження енергії та імпульсу при зіткненні фотона з електроном. В згаданих роботах дифракційна картина пояснюється тим, що електрони, які рухаються в металевій стрічці (в нескінченно глибокій потенціальній ямі), мають дискретні значення імпульсу $\frac{\pi\hbar}{l}n$ [9]. Фотони при зіткненні отримують дискретні значення імпульсу і відхиляються на дискретні кути, які визначаються співвідношеннями (10), (11). В точках, куди попадають фотони, маємо максимуми інтенсивності, в тих точках, куди фотони не попадають, – мінімуми. Слід зазначити, що рівняння (11) залишається справедливим і у випадку дифракції електронів на нескінченній ґратці металевих стрічок [10].

Варто відзначити цікавий результат, що витікає, на наш погляд, із аналізу y -складової імпульсу p_y , який можна розглядати як деяке правило відбору: можливі значення зазначеної складової імпульсу фотона визначаються парними значеннями «кванта» імпульсу, який може мати електрон, рухаючись в нескінченно глибокій ямі (що співставляється металевій стрічці) [10]. Величина кванта імпульсу $\frac{\pi\hbar}{l}$ виникає при розв'язанні задачі про рух частинки в нескінченно глибокій одновимірній потенціальній ямі [9].

Розв'язання задачі

H -поляризовані фотони будуть мати відмінні від нуля $H_x = \psi$, $E_y = \frac{i}{k} \frac{\partial \psi}{\partial z}$ складові електромагнітного поля. На металевих стрічках $E_y = \frac{i}{k} \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$, похідна Ψ -функції $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ дорівнює

нулю, а на щілинах Ψ функція та її похідна за z неперервні. Таким чином, на межі розподілу $z=0$ будемо мати такі умови:

$$\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial \Psi^{(11)}}{\partial z} = 0, \quad (\text{на металевих стрічках}) \quad (12)$$

$$\Psi^{(I)} = \Psi^{(II)}, \quad \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial \Psi^{(11)}}{\partial z} \quad (\text{на щілинах}) \quad (13)$$

Отже, умова $\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial \Psi^{(11)}}{\partial z}$ виконується на всьому періоді ґратки. Аналізуючи вирази (7), (8) при $z=0$ отримуємо рівності

$$\beta_o = 1 + \alpha_o, \quad \beta_n = -\alpha_n, \quad (14)$$

та рівняння

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \exp\left(i \frac{2\pi n}{l} y\right) = 0 \quad (\text{на металі}). \quad (15)$$

Оскільки похідна $\frac{\partial \Psi}{\partial z}$ неперервна на щілині, отримуємо також рівняння

$$-k + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \left[\sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2} \right] \cdot \exp\left(i \frac{2\pi n}{l} y\right) = 0 \quad (\text{на щілині}). \quad (16)$$

А тепер приведемо систему рівнянь (10), (11) до стандартного вигляду. Перш за все, користуючись співвідношеннями (9), перейдемо від коефіцієнтів β_n до коефіцієнтів α_n :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\varphi} = 0 \quad (\text{на щілині}). \quad (17)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n |n| e^{in\varphi} (1 - \xi_n) = i\theta \alpha_0 - i\theta \quad (\text{на металі}), \quad (18)$$

де введені позначення $\theta = \frac{l}{\lambda}$, $\varphi = \frac{2\pi}{l} y$, $\xi_n = 1 + i \sqrt{\frac{\theta^2}{n^2} - 1}$. (19)

Перепишемо систему рівнянь у вигляді

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\varphi} = 0, \quad \tau < |\varphi| \leq \pi; \quad (20)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n |n| e^{in\varphi} = i\theta \alpha_0 + f(e^{i\varphi}), \quad |\varphi| < \tau, \quad (21)$$

де $f(e^{i\varphi}) = -i\theta + \sum_{n \neq 0} \alpha_n |n| e^{in\varphi} \zeta_n$, $\tau = \frac{\pi(l-d)}{l}$.

Диференціюючи (20) та позначаючи $\alpha_n n = x_n$, отримаємо

$$\sum_{n \neq 0} x_n e^{in\varphi} = 0, \quad \tau < |\varphi| \leq \pi \quad (22)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{|n|}{n} e^{in\varphi} = i\theta\alpha_0 + f(e^{i\varphi}) \quad , \quad |\varphi| < \tau \quad (23)$$

Зауважимо, що до цих двох рівнянь треба додати ще одне, бо, як буде видно в подальшому, при записі розв'язку задачі Рімана – Гільберта [1] з'явиться ще одна невідома константа. Її ми отримаємо, покладаючи в рівнянні (22) $\varphi = \pi$:

$$\sum_{n \neq 0} x_n \frac{(-1)^n}{n} = -\alpha_0 \quad (24)$$

Система рівнянь (22), (23) утворює добре відому в теорії дифракції електромагнітних хвиль на періодичних структурах задачу Рімана – Гільберта [1]. Вона має такий вигляд як рівняння, отримані при розв'язанні задачі про дифракцію E -поляризованої хвилі на ґратці нескінченно тонких стрічок з ідеальною провідністю [1]. Різниця полягає лише у виборі положення початку системи координат. У випадку E -поляризації точка $y = 0$ лежить посередині щілини, а в нашому випадку дифракції H -поляризованих фотонів початок осі y лежить посередині стрічки. Тобто система рівнянь у першому випадку записується відносно коефіцієнтів поля за ґраткою, у другому – відносно коефіцієнтів розкладу псі-функції перед ґраткою, що диктується формалізмом вищезгаданої задачі.

Рівняння (22), (23) зводяться до задачі [1], точний розв'язок якої представляється у вигляді нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів α_n :

$$\begin{aligned} -x_m &= i\theta\alpha_o V_m^o - i\theta V_m^o + \sum_{n \neq 0} x_n \xi_n \frac{|n|}{n} V_m^n + 2CR_m; m \neq 0 \\ 0 &= i\theta\alpha_o V_o^o - i\theta V_o^o + \sum_{n \neq 0} x_n \frac{|n|}{n} \xi_n V_o^n + 2CR_o \\ \alpha_o &= i\theta\alpha_o V_\sigma^o - i\theta V_\sigma^o + \sum_{n \neq 0} x_n \frac{|n|}{n} \xi_n V_\sigma^n + 2cR_\sigma, \end{aligned} \quad (25)$$

де $x_n = n\alpha_n$, $\theta = \frac{l}{\lambda}$, вирази коефіцієнтів $V_o^o, V_\sigma^o, V_\sigma^n, V_m^o, V_m^n, R_o, R_m$ через поліноми Лежандра, приведені в роботі [11]. Треба лише враховувати, що аргумент, від якого вони залежать, $u = \cos \frac{\pi(l-d)}{l}$.

Оскільки величини ξ_n визначаються виразом (19), то маємо $\xi_n = \xi_{-n}$. Звідси випливає, що $\alpha_n = \alpha_{-n}$ і $x_n = -x_{-n}$, а це означає, що систему (19) в решті решт можна написати у вигляді

$$\begin{aligned} -\alpha_o &= i\theta\alpha_o V_\sigma^o - i\theta V_\sigma^o + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_n (V_\sigma^n + V_\sigma^{-n}) + 2CR_\sigma, \\ 0 &= i\theta\alpha_o V_o^o - i\theta V_o^o + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_n (V_o^n + V_o^{-n} + 2CR_o), \\ x_m &= i\theta\alpha_o V_m^o - i\theta V_m^o + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_n (V_m^n + V_m^{-n}) + 2CR_m, \\ &(m = 1, 2, 3\dots). \end{aligned} \quad (26)$$

Аналіз чисельних результатів

Покладаючи в системі рівнянь (26) $\xi_n = 0$, для всіх $n > N$ можна отримати скінченну систему рівнянь, розв'язок якої можна записати у вигляді

$$\beta_0 = \frac{i\theta\Delta}{i\theta\Delta + D}, \quad \beta_n = \frac{1}{n} \frac{i\theta D^{(n)}}{i\theta\Delta + D}, \quad (n \neq 0), \quad (27)$$

де величини $\Delta, D, D^{(l)}$ представляються у вигляді нескінченних рядів, що сходяться як $\frac{1}{n^2}$ при $n \rightarrow \infty$. Для чисельного аналізу, обмежимося значенням $\theta = 1,9$ та скористаємося наближеними виразами для $\Delta, D, D^{(l)}, D^{(2)}$ приведеними в роботі [11]. Для $\theta = 1,9$ всі ξ_n починаючи з $n = 2$ дорівнюють нулю, тому в розкладі Ψ -функції (5) відмінними від нуля будуть тільки члени з $|n| \leq 1$. За ґраткою Ψ -функція фотона має вигляд

$$\Psi^{(II)}(y, z) = \exp[-ikz] \cdot [b_0 + 2b_1 \exp\{i(k - \gamma_1)z\} \exp(i\varphi)]. \quad (28)$$

Як можна бачити з виразу (28), Ψ -функція періодично залежить від координати z . При чисельних розрахунках обмежимося значеннями показника експоненти $(k - \gamma_1)z = 2\pi ml$. Результати чисельних розрахунків приведені на рис. 2 у вигляді залежностей $|\Psi|^2$ від y для одного періоду l при різних значеннях коефіцієнта заповнення d/l , бо, як витікає із виразу (28), дифракційна картина повторюється з періодом l . Для випадків 1), 2) служить ліва шкала, для випадку 3) – права. Як видно з графіків (рис. 2), дифракційна картина має два максимуми на одному періоді на довжині періоду l , з більш яскраво вираженим, розташованим навпроти щілини. Як і у випадку дифракції фотонів на двох паралельних щілинах в плоскому екрані [12], вторинні максимуми відсутні. Величина основного максимуму істотно залежить від співвідношення між шириною щілини і періодом ґратки. Із зростанням ширини щілини висота максимуму зростає. Але як можна побачити із графіка 3), для $d/l = 0.9$ у випадку, коли ширина щілини значно перевищує ширину стрічки дифракційна картина згладжується. І, як витікає із аналізу виразів для коефіцієнтів β_0, β_1 (27), при $d/l \rightarrow 1$, $\beta_0 \rightarrow 1$, $\beta_1 \rightarrow 0$ імовірність проходження фотона через ґратку наближається до одиниці. В протилежному випадку, коли $d/l \rightarrow 0$, $\beta_0 \rightarrow 0$, $\beta_1 \rightarrow 0$, імовірність проходження фотона через ґратку наближається до нуля $|\Psi|^2 \rightarrow 0$.

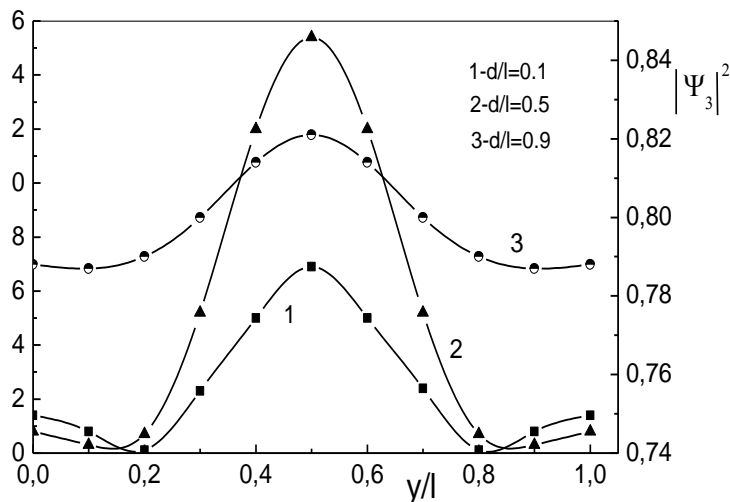


Рис. 2. Розподіл густини ймовірності в дифракційній картині

Висновки

Базуючись на строгому розв'язанні граничних задач методом Рімана – Гільберта [1], отримано вирази для амплітуди ймовірності Ψ проходження H -поляризованих фотонів при дифракції на безмежній ґратці нескінченно тонких металевих стрічок при нормальному падінні для довільного співвідношення між шириною щілини і періодом структури.

Отримані чисельні розрахунки дозволяють стверджувати, що ймовірність попадання фотона в будь-яку точку екрана, розташованого за ґраткою, дифракційна картина має два максимуми на одному періоді на довжині періоду l , з більш яскраво вираженим максимумом, розташованим навпроти щілини.

Список літератури:

1. Агранович З. С., Марчено В. А., Шестопапов В. П. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках // ЖТФ. 1962. Т. 32. № 4. С. 381-386
2. Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики. Москва : Госиздат, 1949. 588с.
3. Юхновський І. Р. Основы квантовой механики. Киев : Либідь, 2002. 392 с.
4. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Москва : Мир, 1985. 264 с.
5. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. Москва : Наука. 1973. 718 с.
6. Безуглий А. В. Дифракция фотонов на системе параллельных щелей // Радиотехника. 2006. Вып. 147. С. 65-68.
7. Безуглий С. А., Безуглий А. В., Петченко О. М. Дифракция света наддумерной решетке из бесконечно тонких металлических лент // Радиотехника. 2011. Вып. 165. С. 169-172.
8. Безуглий С. А., Безуглий А. В., Петченко О. М. Нормальне падіння рентгенівських променів на тривимірну ґратку атомів // Радиотехника. 2012. Вып. 168. С.156-159.
9. Ландау А. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 3. Москва, 1963. С. 74 – 90.
10. Безуглий А. В., Петченко О. М. Дифракція електронів на ґратці нескінченно тонких металевих стрічок // Вісник ХНУ. 2012. №1020, серія “Фізика”. Вип. 17. С. 74-79.
11. Шестопапов В. П. Метод задачи Римана – Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. Харьков : Изд-во ХГУ, 1971. 400с.
12. Bezugly A. V., Petchenko O. M. Photon flow density in the diffraction pattern of single and two parallel slits. // Telecommunications and Radio Engineering. 2018. 77(1). P.77-82.

*Харківський національний університет
міського господарства імені О.М. Бекетова*

Надійшла до редколегії 23.04.2019